

Je ne dois pas non plus laisser ignorer à la Classe, qu'ayant communiqué mes premiers résultats au Cit. La Place, je ne tardai pas à reconnaître qu'il avait aussi porté dès longtemps ses vues sur ce sujet. Mais, loin de me découvrir une vérité qui m'aurait sans doute empêché de continuer ces recherches, il m'engagea beaucoup à les suivre. Et c'est à mesure que j'avais qu'il m'a fait part des méthodes qu'il avait employées. Je dois donc les lui rapporter entièrement, et c'est la seconde fois qu'ayant été assez heureux pour me rencontrer avec lui, j'éprouve de sa part cette obligeante réserve.

Je n'examinerai pas ici si la chaleur est un corps, ou si elle n'est que le résultat du mouvement intérieur des particules de la matière, mais, en admettant que ses effets lorsqu'elle devient sensible sont mesurables par le thermomètre, je chercherai les lois de sa propagation.

J'ai fait mes premières expériences sur une barre de fer d'environ deux mètres et deux décimètres de longueur (7 pieds) et de trois centimètres d'épaisseur (1 pouce $\frac{1}{2}$); elle était recourbée par un bout sur une longueur de vingt-trois centimètres, de manière à pouvoir être plongée par cette extrémité dans une source constante de chaleur. On avait percé sur cette barre six trous qui allaient un peu plus loin que son centre, et qui étaient éloignés les uns des autres de quatre décimètres. Ces trous remplis de mercure recevaient autant de thermomètres, et le tout était supporté par deux pieds de bois sec.

Il est clair qu'en mettant l'extrémité de la barre en communication avec une source constante de chaleur, les différents thermomètres devaient indiquer la loi de sa distribution. Il fallait seulement avoir soin d'entretenir un courant d'air dans le lieu de l'expérience, et observer les variations de température qui pouvaient y survenir.

J'ai d'abord employé pour source constante de chaleur un vase rempli d'eau à 60° de Réaumur (75°C), entretenu constamment à cette température par le moyen d'une lampe; il était recouvert, de manière que les vapeurs humides ne

pouvaient pas se porter sur la barre et la mouiller.

On sait, par des expériences journalières, que le fer est un mauvais conducteur du calorique; cependant, j'étais encore bien loin de soupçonner à cet égard toute son imperfection.

Les thermomètres ne s'ébranlèrent qu'avec une extrême lenteur et, quoique la température fût entretenue au même degré pendant dix heures entières, il me fut impossible d'étendre ses effets au-delà des deux premiers thermomètres, c'est-à-dire environ à dix décimètres de la surface de l'eau. Encore le second thermomètre s'était-il à peine élevé sensiblement.

Je compris alors à quel point le fer est mauvais conducteur du calorique. Je fis percer des trous en plus grand nombre, à un décimètre de distance les uns des autres, sur tout le côté de la barre qui devait s'échauffer le plus. Et je répétai l'expérience avec du mercure chauffé à 82° de Réaumur (102.5°C), et maintenu à cet état pendant cinq heures au moyen d'un quinquet.

Trois de mes élèves observaient avec moi de minute en minute avec une montre à secondes la marche des thermomètres.

Après quatre heures d'échauffement, ils parvinrent à un état stationnaire. On les laissa ainsi pendant une heure pour s'assurer qu'ils ne devaient plus monter.

Alors l'état des thermomètres se trouva tel que le représente le tableau ci-joint et numéroté A. Les accroissements de température au-dessus de la température de l'air, allaient en diminuant depuis le premier thermomètre jusqu'au septième, éloigné du niveau du mercure de dix décimètres. Celui-ci était monté d'un peu moins de 1°. Les thermomètres suivants demeurèrent absolument insensibles. En sorte qu'il restait douze décimètres, c'est-à-dire plus de la moitié de la barre qui n'avait pas éprouvé d'accroissement appréciable dans sa température.

La lenteur du refroidissement répondit à celle de l'échauffement, et les thermomètres suivirent la même marche dans leurs indications, le plus voisin de l'extrémité de la barre qui était monté plus vite descendit plus vite, et

ainsi des autres. Celui du milieu a mis une fois près d'une heure avant d'être descendu sensiblement.

En faisant ces expériences, il faut avoir soin d'attendre longtemps pour être sûr que les thermomètres ont atteint l'état où ils doivent rester stationnaires. Si l'on se laisse tromper par la lenteur de leur marche, et qu'on retire trop tôt la source constante de chaleur, les thermomètres plongés dans l'intérieur de la barre, et éloignés de ce foyer, continuent de monter pendant quelque temps, après quoi ils deviennent stationnaires, et redescendent ensuite.

Il s'agissait de trouver la loi de ces expériences, c'est-à-dire, la relation qui existe entre les accroissements de température des différents thermomètres et leurs distances au foyer commun.

En comparant avec soin ces accroissements, je m'aperçus qu'on pouvait les représenter très exactement par une loi logarithmique, dont ils seraient les ordonnées, les abscisses étant les distances au foyer commun; les nombres calculés dans cette hypothèse ne s'écartaient pas des observations de 0°,5 pour aucun des thermomètres. Ayant l'équation de la courbe, je pus calculer la température de la barre au niveau du mercure, je la trouvai égale à celle du mercure même que l'on avait observée au thermomètre, l'erreur n'était pas de 0°,4 en moins.

Je pus aussi juger d'après cette loi pourquoi mes derniers thermomètres n'avaient pas bougé car, en calculant la température qu'il aurait fallu mettre au bout de la barre pour faire monter le dernier thermomètre seulement de 3°, je trouvai qu'elle était égale à 2393° de Réaumur, c'est-à-dire quatre fois plus considérable que la chaleur qu'il faut donner aux barres de fer selon Wedgwood pour les mettre en état de s'incorporer. Ainsi il est physiquement impossible de chauffer d'un degré l'extrémité d'une barre de fer de 2 mètres ou 6 pieds de longueur en la chauffant par l'autre bout, car elle fondrait auparavant.

Ce n'était pas assez de conclure ces résultats par l'expérience, il fallait les trouver par la

théorie, car l'expérience seule ne montre que des faits isolés, c'est la théorie qui fait apercevoir leurs rapports.

Pour cela il faut partir de cette loi, que lorsque deux corps de températures différentes sont mis en contact, la quantité de chaleur que le plus chaud communique au plus froid dans un temps très court est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à leur différence de température. Je fais abstraction ici de toute action ou combinaison chimique. Cette loi a été supposée par Newton dans ses essais de la chaleur. Richman l'a confirmée depuis par ses propres expériences et par celles de Krafft, enfin M. le Comte de Rumford lui-même a ajouté par de nouveaux faits un nouveau poids à ces autorisés.

Je sais bien que le Dr Martine a prétendu que cette loi aurait besoin de quelque correction, et il a voulu y ajouter une progression arithmétique. Mais il a appuyé cette opinion sur des expériences de Muschbroek qui ne paraissent rien moins qu'exactes, puisqu'elles donnent plus de 320 degrés de Réaumur (400°C) pour la température du plomb fondant, qui n'est au plus que de 210 (262,5°C), comme je le prouverai tout à l'heure par mes expériences. Sans doute l'erreur de Muschbroek vient de ce qu'il s'est servi d'un pyromètre compliqué de plusieurs pièces, dont le jeu et les dilatations mal connues ont suffi pour causer ces irrégularités; et c'est ici le cas de remarquer que, pour mesurer une cause dont les modifications et la manière d'agir sont aussi peu connues que celle de la chaleur, on ne doit employer que des moyens très simples, et dont l'exactitude fondée sur des lois géométriques tient à la nature même et non à la perfection de l'instrument.

Enfin, si la loi de Newton sur l'intensité avec laquelle la chaleur se communique exige quelques corrections, c'est en comparant ses résultats aux observations qu'on pourra les apprécier, mais, en l'appliquant à mes expériences, j'ai vu qu'elle y satisfait avec une rigueur pour ainsi dire mathématique.

Pour établir le calcul d'après cette loi, il faut considérer que chaque point de la barre reçoit

de la chaleur de celui qui le précède, et en communique à celui qui le suit. La différence est ce qui lui reste à raison de sa distance au foyer, et il s'en perd une partie dans l'air soit par le contact immédiat de ce fluide, soit par le rayonnement.

Ainsi, dans l'état d'équilibre, lorsque la température de la barre est devenue stationnaire, l'accroissement de chaleur que chaque point de la barre reçoit en vertu de sa position est égal à ce qu'elle perd par le contact de l'air et par le rayonnement, perte qui est proportionnelle à sa température.

Et dans l'état de mouvement où la température de la barre change à chaque instant, la quantité de chaleur reçue par chaque point à raison de sa position, moins la quantité qu'il perd par le rayonnement et le contact de l'air, est égale à la quantité dont s'accroît sa température dans le même intervalle.

La première condition, réduite en calcul, donne lieu à une équation différentielle du second ordre entre deux variables qui sont l'accroissement de température de chaque point et sa distance à la source constante de chaleur. Cette équation est linéaire, à coefficients constants, et peut s'intégrer par les méthodes connues.

La seconde condition où il entre une variable de plus, qui est le temps, conduit à une équation différentielle partielle du second ordre. Cette équation qui donne l'état de la barre à un instant quelconque, renferme implicitement la précédente.

Le seul cas que je traiterai dans ce Mémoire est celui d'une barre métallique indéfinie plongée par une de ses extrémités dans une source de chaleur constante et maintenue dans cet état jusqu'à ce que sa température n'éprouve plus aucun changement.

L'équation différentielle qui s'y rapporte contient dans son intégrale deux constantes arbitraires multipliant deux termes exponentiels, et de plus une autre quantité aussi constante mais non arbitraire, qui dépend du rapport de la conductibilité au rayonnement.

Ces trois constantes doivent être déterminées par les circonstances particulières de l'échauffement de la barre ou par les observations.

Et d'abord, l'extrémité la plus éloignée de la source constante de chaleur n'en devant éprouver aucun effet sensible, cette partie restera constamment à la température de l'air. Ainsi l'intégrale devra être telle qu'elle devienne nulle quand la distance au foyer est infinie. Cette condition fait disparaître un des termes exponentiels, et la formule n'en renfermant plus qu'un seul de ce genre, représente une courbe logarithmique.

A la rigueur, le cas d'une barre indéfinie ne se rencontre jamais dans les expériences, mais on peut l'appliquer dès que la longueur de la barre est assez grande pour que ses derniers points n'éprouvent pas d'effets sensibles, ou du moins pour qu'ils n'en éprouvent que de très faibles. C'est ce qui est toujours arrivé dans mes expériences, où j'ai employé des barres de fer et de cuivre de vingt-deux décimètres (7 pieds) de longueur; pour déterminer la constante arbitraire de l'intégrale et le rapport de la conductibilité au rayonnement, il suffit de deux observations. Ces quantités une fois connues, la formule donne l'état de tous les thermomètres.

Dans les tableaux que je soumetts à la Classe, j'ai rapporté d'une part les résultats des expériences que j'ai faites avec la barre de fer, sur le mercure à 82°, l'étain et le plomb fondants et avec la barre de cuivre sur le mercure et le plomb. J'ai placé à côté les résultats du calcul et j'ai mis les différences du calcul et de l'observation dans une troisième colonne, afin qu'on puisse aisément les apercevoir.

Jamais ces différences ne s'élèvent à 0°,5 de Réaumur pour aucun des thermomètres, et il y a toujours eu six thermomètres qui ont bougé dans la barre de fer: il y en a eu quatorze dans la barre de cuivre, ce métal étant meilleur conducteur que l'autre. La plupart des différences sont même fort au-dessous de 0°,5, et comme elles se trouvent indifféremment en plus ou en moins, il est clair qu'elles sont dues aux erreurs inévitables des observations.

Pour atteindre ce degré d'exactitude, j'ai employé une méthode que le C. La Place a donnée dans la Mécanique céleste pour trouver la courbe qui satisfait le mieux à une série de résultats observés, lorsqu'on a des équations de condition entre les erreurs.* J'ai déterminé aussi parmi toutes les lois logarithmiques celle qui donne le minimum d'erreur en l'appliquant aux observations des thermomètres; je n'ai pas besoin de faire remarquer combien cette méthode a d'avantage sur les simples constructions graphiques.

On voit, par ce que je viens de dire, que la théorie et l'expérience s'accordent avec la plus grande rigueur pour nous indiquer l'état d'équilibre de la chaleur dans une barre métallique indéfinie qui communique, par une de ses extrémités, avec une source de chaleur constante. Lorsque l'état de la barre est devenu stationnaire, la température de ses divers points décroît suivant une courbe logarithmique en s'éloignant du foyer.

La valeur de la constante qui dépend du rapport de la conductibilité au rayonnement s'est trouvée à fort peu près la même, pour la même barre, quoique différente d'une barre à l'autre. Il s'ensuit que, pour la même barre, les différentes températures centrales donnent toujours la même courbe logarithmique sous des échelles différentes. Cette propriété permet de dire quel est le degré marqué par tous les thermomètres dans une barre connue, lorsqu'ils sont parvenus à l'état stationnaire, et que l'on donne la température d'un seul d'entre eux. Il suffit pour cela d'une simple proportion. J'ai souvent répété cette épreuve.

Je ne crois pas cependant que l'on puisse encore affirmer que le rapport de la conductibilité au rayonnement reste toujours exactement le même, quelle que soit la température de la source constante de chaleur. J'ai trouvé au contraire dans la valeur de cette quantité quelques différences, à la vérité fort petites,

mais qui, se reproduisant toujours dans le même sens, ne paraissent pas devoir être négligées, vu l'extrême exactitude que ces expériences et ces calculs comportent. Je crois même avoir découvert la raison de ces différences, l'affaiblissement de la force de cohésion par l'introduction du calorique; mais comme j'ai projeté sur ce sujet une expérience décisive, qui en mettra les conséquences dans le plus grand jour, j'attendrai qu'elle soit terminée pour en entretenir la Classe.

Au reste, le degré d'exactitude dont ces recherches sont susceptibles est tel que l'on peut espérer d'en obtenir des résultats très précis, surtout lorsque l'on aura corrigé les petites causes d'erreurs qui restent encore dans l'appareil, et que les expériences y ont fait découvrir. Tel est par exemple le contact des supports qui, bien que construits en bois sec, modifient cependant un peu l'état des points avec lesquels ils communiquent. Telle est encore la forme plus ou moins régulière de la barre, sa surface plus ou moins polie, toutes causes qui, étant inégales pour les différents points, les affectent diversement. Mais l'observation les indique assez bien pour qu'il soit facile de les corriger.

C'est à quoi je travaille en ce moment, afin de pouvoir ensuite mesurer avec une grande précision toutes les circonstances qui tiennent à la distribution de chaleur dans les métaux et les autres corps solides, principalement dans le verre, qui, de toutes les substances que j'ai éprouvées, est celle qui laisse arriver le plus difficilement la chaleur au thermomètre, comme je m'en suis assuré par plusieurs expériences comparatives; une conséquence naturelle de ces recherches, c'est le calcul exact des modifications que la densité des corps, leur forme, et le poli de leur surface introduisent dans la quantité de chaleur libre qu'ils dégagent quand on les expose à la même température; c'est une source féconde de résultats intéressants que j'aurai l'honneur de soumettre à la Classe, lorsqu'ils auront acquis toute l'exactitude nécessaire pour lui être présentés.

* Sc. et Arts, vol. 27, n° 4, an XIII (déc. 1804, v.st.).

Je vais maintenant passer à une application de ces mêmes expériences qui me semble mériter l'attention des physiciens par sa simplicité et par l'utilité qu'elle peut avoir.

On cherche depuis longtemps un moyen simple et exact de mesurer des températures élevées, en parties de l'échelle du thermomètre à mercure. Ce thermomètre lui-même ne peut servir à cet objet, parce qu'à une certaine température le mercure commence à bouillir. Il devient même inexact avant ce terme, parce qu'en général, comme Deluc l'a fait voir, les dilatations des liquides deviennent inégales en approchant de l'ébullition.

Newton avait imaginé pour cela un procédé géométrique fondé sur la loi suivant laquelle les corps se refroidissent dans l'air. D'après cette loi, que Richman a depuis démontrée par l'expérience, les temps étant pris en progression arithmétique, les décroissements de chaleur formaient une progression géométrique; c'est-à-dire que la courbe qui représente les décroissements est une loi logarithmique, en sorte qu'en connaissant la température du corps à un instant donné, on peut par les tables de logarithmes, en conclure sa température à un instant quelconque, celle de l'air étant supposée toujours la même.

Pour appliquer ce principe, Newton faisait rougir au feu un morceau de fer assez considérable. et il le suspendait dans l'air. Alors il plaçait sur sa surface diverses substances fusibles et il observait les instants auxquels ces substances commencent à se congeler par l'effet du refroidissement progressif et, comme il avait préalablement déterminé par le moyen d'un thermomètre d'huile la température à laquelle l'étain commence à fondre, cette donnée lui suffisait pour calculer toutes les autres températures en parties de ce même thermomètre, depuis l'époque où elles avaient été observées.

Ce moyen est sans doute extrêmement simple, mais s'il m'est permis de le dire, il me semble qu'il n'est pas exempt de quelque inexacitude parce qu'il doit être fort difficile de saisir l'instant

auquel les diverses substances commencent à geler, et qu'une petite erreur sur le temps peut en occasionner une assez sensible sur l'évaluation de la température, principalement lorsqu'elle est fort élevée. Par exemple, Newton trouve pour la température du plomb fondant 225° de l'échelle de Réaumur (280°C) quoiqu'elle ne soit que d'environ 210° ($262^{\circ},5$) comme je le prouverai plus bas.

Cependant les expériences faites de cette manière ne comportent que d'assez légères erreurs, surtout lorsqu'elles sont de la main de Newton, et je m'étonne qu'au lieu de chercher à perfectionner ce procédé géométrique on en ait imaginé de mécaniques beaucoup plus inexacts, comme est, par exemple, le pyromètre de Muschembroek et comme sont en général tous les pyromètres métalliques dont on a fait jusqu'à présent usage, lesquels sont nécessairement inexacts à cause du jeu des différentes pièces qui les composent, et surtout non comparables, parce qu'il est certain que les corps fortement chauffés ne reviennent pas toujours exactement aux mêmes dimensions qu'ils avaient d'abord, et ne conservent pas la même dilatabilité; variations très petites à la vérité, mais dont l'influence sur les résultats est cependant très considérable parce qu'elle y entre agrandie et multipliée dans une énorme proportion.

Les expériences que j'ai eu l'honneur de soumettre à la Classe me paraissent propres à atteindre ce but d'une manière beaucoup plus sûre, en employant la loi géométrique suivant laquelle la chaleur diminue dans une barre métallique à partir d'un foyer constant.

Car il suffit de mesurer cette température sur la barre à une distance connue du foyer lorsqu'elle est devenue stationnaire, et par un calcul très simple on en déduit celle du foyer.

Comme on peut répéter cette opération sur chaque thermomètre, chacun d'eux donnera à raison de sa distance la température cherchée si ces résultats, qui doivent s'accorder tous entre eux, diffèrent quelque peu les uns des autres, en prenant une moyenne arithmétique

entre eux, on aura le résultat véritable avec beaucoup d'exactitude.

Mais comme cette méthode donnerait autant d'influence aux derniers thermomètres qu'aux premiers, tandis que les accroissements de ceux-ci sont plus considérables, et par conséquent moins affectés par les erreurs des observations, il me paraît plus sûr de prendre une marche un peu différente; je cherche d'abord, comme je l'ai dit, la loi logarithmique qui donne le minimum d'erreur entre les premiers thermomètres, j'en déduis comme une vérification l'état des derniers qui doit être représenté ainsi à fort peu près, et lorsque je me suis assuré par là que la formule n'est pas en erreur de 0°,5 sur aucun des thermomètres, j'emploie les nombres corrigés et j'en conclus la température de la source constante de chaleur.

Pour donner un essai de ce calcul, voici les résultats que j'ai obtenus pour la température du plomb fondant.

L'expérience faite avec la barre de fer m'a donné pour cette température 206°,40 de l'échelle de Réaumur (258°C).

L'expérience faite avec la barre de cuivre a donné 210°,86 (263,5°C).

La différence de ces résultats, obtenus par deux épreuves tout à fait indépendantes l'une de l'autre, est extrêmement petite; on peut donc les regarder comme très approchant de la vérité, et ceci justifie la remarque que j'ai faite plus haut sur les incertitudes dont le procédé de Newton est susceptible.

J'ai fait aussi des expériences sur la fonte de l'étain, mais comme je n'ai encore employé pour cela que la barre de fer, je ne puis offrir à la Classe une comparaison aussi certaine. C'est pourquoi je ne rapporterai point les résultats, je me bornerai seulement à dire que tous les thermomètres s'accordèrent très exactement pour donner à cette température une valeur très peu différente de celle que l'on assigne ordinairement pour la fonte de l'étain laquelle est de 168°, suivant Newton.

Il y a sans doute des recherches à faire, pour rendre usuelle la méthode que je viens de proposer, mais voilà le principe; je désire que ceux qui ont plus que moi la pratique des arts le jugent assez utile pour chercher à l'appliquer.

A. Première expérience faite avec la barre de fer plongée par le bout dans du mercure à 82°

Rang des thermomètres*	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Températures observées en degrés de Réaumur†	69°	23.5	14°	9°	5.75°	3.75°	1.75°	1"	insensible
Températures calculées‡	68.63°	23.5°	14.16°	9°	5.55°	3.45°	1.33°	0.51°	
Différences entre le calcul et l'observation	+0.37°	0°	-0.16°	0°	-0.20°	+0.30°	+0.42°	+0.49°	

* Celui qui est numéroté 0 indique le niveau du mercure distant du ler de 2-115.

† Les observations des thermomètres sont comptées à partir de la température de l'air égale à 13°.

‡ Equation de la loi logarithmique $y = Ta^x \log a = 0.220074$.

La loi logarithmique qui a servi pour calculer ces expériences n'a point été déterminée de manière à donner le minimum d'erreur, mais simplement de manière à satisfaire aux observations 1 et 3. Les distances des thermomètres entre eux sont :

1 à 2	1
2 à 3	0,894
3 à 4	0,961
4 à 5	0,932
5 à 6	1,875
6 à 7	1,894

Remarque

On peut se demander quelle température il aurait fallu mettre au bout de la barre pour que tous les thermomètres eussent bougé au moins de 1° , pour cela on remarquera que depuis le thermomètre 7 jusqu'à la fin de la barre il y a la moitié juste de cette barre, plus 4 décimètres ou 11,566; ajoutant donc à cette quantité 2,115 qui exprime la distance de 1 au niveau du mercure, on aura en tout $x = -13,671$: mettant cette valeur dans l'équation de la courbe, on trouve qu'il faudrait une chaleur égale à 23971° du thermomètre de Réaumur. Température qui excède plus de quatre fois celle des barres de fer chaudes au point de s'incorporer. Celle-ci étant de 5967° suivant Wedgwood.

B. Expériences faites avec une barre de fer plongée par le bout dans du plomb fondant

Rang des thermomètres*	1	2	3	4	5	6	7
Températures observées exprimées en degrés de Réaumur†	61,50°	37,75°	23,50°	14,25°	8,50°	3,00°	1,25°
Températures calculées‡	62,06°	37,41°	23,42°	14,38°	8,90°	3,45°	1,33°
Différences entre le calcul et l'observation	-0,56°	+0,34°	+0,08°	-0,13°	-0,40°	-0,45°	-0,08°

* Depuis la surface du plomb fondant jusqu'au premier thermomètre, la distance est de 2,23077

1 à 2..... 1
 2 à 3..... 0,88942
 3 à 4..... 0,96153
 4 à 5..... 0,94711
 5 à 6..... 1,8702
 6 à 7..... 1,8846

On a pris pour unité la distance de 1 à 2, qui est de 104 millimètres.

† Les températures sont comptées au-dessus de celle de l'air qui était de $14,5^\circ$ de Réaumur.

‡ L'équation de la courbe est $y = Ta^x$. On a trouvé $\log a = 0,2198$. Cette valeur a été déterminée de manière à avoir la moindre erreur d'observation possible entre les quatre premiers thermomètres.

Remarque

Calcul de la température du plomb fondant.

Valeur de y au niveau du plomb fondant..... 191,90

Température initiale..... 14,5

Température du plomb fondant..... 206,40°

C. Expériences faites avec une barre de cuivre plongée par le bout dans du plomb fondant

Rang des thermomètres*	1	2	3	4	5	6	7
Températures observées en degrés de la division centigrade†				80°50	65°75	53°75	43°75
Températures calculées‡	148°31	121°03	98°77	80°60	65°78	53°82	43°80
Différences entre le calcul et l'observation				-0°10	-0°03	-0°07	-0°05

Rang des thermomètres*	8	9	10	11	12	13	14
Températures observées en degrés de la division centigrade†	35°50	24°00	15°70	11°00	7°50	5°25	3°75
Températures calculées‡	35°75	23°81	15°85	10°56	7°03	4°68	3°12
Différences entre le calcul et l'observation	-0°25	+0°19	-0°15	+0°44	+0°47	+0°57	+0°63

* Distances des thermomètres entre eux et foyer commun :

Depuis la surface du plomb fondant jusqu'au premier thermomètre : 2,5

de 1 à 2..... 1	de 6 à 7..... 1	de 11 à 12..... 2
de 2 à 3..... 1	de 7 à 8..... 1	de 12 à 13..... 2
de 3 à 4..... 1	de 8 à 9..... 2	de 13 à 14..... 2
de 4 à 5..... 1	de 9 à 10..... 2	
de 5 à 6..... 1	de 10 à 11..... 2	

On a pris pour unité la distance de 1 à 2, qui est de 100 millimètres.

† Ces températures sont comptées au-dessus de celle de l'air qui était de 15°75 de la division centigrade.

‡ L'équation de la courbe est $y = Ta^x$, $\log a = 0,08827$.

Cette valeur a été déterminée de manière à avoir la moindre erreur d'observation possible entre les thermomètres 4, 5, 6, 7. La température des précédents ayant excédé l'étendue de leur échelle n'a pu être observée et on l'a déduite du calcul.

Remarque

Calcul de la température du plomb fondant

Valeur de y au niveau du plomb.....	243°58
Température initiale.....	20°
Température du plomb fondant.....	263°58
ce qui donne en degrés de Réaumur.....	210°86

D. Expériences faites avec la barre de cuivre plongée dans du mercure à 95°

Rang des thermomètres*	1	2	3	4	5	6	7
Températures observées en degrés de la division centigrade†	61,50	50,00	42,00	35,00	28,50	23,75	19,37
Températures calculées‡	61,38	50,85	42,12	34,90	28,91	23,96	19,83
Différences entre le calcul et l'observation	+0,12	+0,15	-0,12	+0,10	-0,41	-0,21	-0,46

Rang des thermomètres*	8	9	10	11	12
Températures observées en degrés de la division centigrade†	15,94	12,25	8,12	5,62	3,75
Températures calculées‡	16,43	11,27	7,74	5,31	3,64
Différences entre le calcul et l'observation	-0,49	-0,02	+0,38	+0,31	+0,11

* Les différences d'abscisses sont les mêmes que dans le tableau C

† Ces températures sont comptées au-dessus de celle de l'air qui était de 17°5 de la division centigrade.

‡ La loi logarithmique a été déterminée de même pour le minimum d'erreur entre les quatre premiers thermomètres. On a trouvé $\log a = 0,08171$, valeur sensiblement moindre que celle qui résulte du plomb fondant.

INTRODUCTION

“The Basic Law of Heat Transfer” was published by Wilhelm Nusselt in 1905.

This paper exerted a considerable influence upon the developments in Heat Transfer. Here an application of similarity, or dimensional analysis, as it is also called, is provided for the heat transfer in forced and free convection. Although the method of similarity had been used before by Osborne Reynolds (1883) and by Hermann von Helmholtz (1873), Nusselt extended the method, establishing a classifying principle for the two most important cases in heat transfer. It is not exaggerating to observe this as a decisive step in the development of this field. Below, the paper is presented in its original form, a few misprints were eliminated.

U. GRIGULL

Technische Hochschule, München

E. HAHNE

DAS GRUNDGESETZ DES WÄRMEÜBERGANGES

PROF. DR. WILHELM NUSSELT

Dresden

DIE WÄRME, die ein fester Körper mit einer angrenzenden Flüssigkeit oder einem ihn umgebenden Gase durch Wärmeleitung austauscht, ist für eine Reihe von technisch wichtigen Fällen durch den Versuch bestimmt worden.

In einer früheren Abhandlung [1] habe ich für die Kühlwirkung eines durch ein Rohr fließenden Gasstromes durch Ähnlichkeitsbetrachtung aus den diesen Vorgang beherrschenden Differentialgleichungen Beziehungen abgeleitet, denen die Versuchsergebnisse zu genügen haben. Diese theoretischen Ergebnisse wurden durch meine Versuche sehr gut bestätigt.

Im folgenden will ich ähnliche Betrachtungen für den Fall eines in ruhender Luft aufgestellten festen Körpers ausführen und an vorhandenen Versuchen prüfen.

Ein grosser Raum sei mit einer tropfbaren oder einer elastischen Flüssigkeit gefüllt. Diese habe zunächst überall die Geschwindigkeit null und die gleichmässige Temperatur T_0 absolut. In diesen Raum werde ein heisser, fester Körper gebracht, der die gleichmässige Oberflächentemperatur T_w besitze, welche durch örtliche innere Wärmezufuhr dauernd gleich hoch gehalten werde. Die Wärmeabgabe des Körpers erfolgt auf zwei verschiedene Weisen. Ein Teil von ihr wird durch Strahlung an die

Umgebung abgegeben. Besteht diese aus einer Flüssigkeit, so wird in den an die Körperoberfläche grenzenden Schichten die gesamte ausgestrahlte Wärme absorbiert und diese dadurch erwärmt. Aber diese Wärmemengen sind gegen die durch die Flüssigkeit abgeleitete Wärme verschwindend klein. Bildet die Umgebung ein Gas, so ist dieses bis auf einen von der Gasart abhängigen engen Spektralbereich für die Wärmestrahlung durchlässig. Die Wärmeabgabe durch Strahlung erfolgt dann ohne Beeinflussung des Gases an die Umfassungswände. Diese solle so gross sein, dass keine merkliche Änderung ihrer Temperatur T_0 eintritt. Die Gesetze der Wärmestrahlung mögen in einer späteren Abhandlung besprochen werden, während die folgenden Zeilen eine Formulierung der durch Wärmeleitung abgegebenen Wärme enthalten.

Ist λ die Wärmeleitfähigkeit des umgebenden Mediums, T seine Temperatur an der Stelle mit den Koordinaten x , y und z , so ist die von einem Flächenelement der Körperoberfläche von der Grösse df in der Zeit dt durch Wärmeleitung abgegebene Wärme dQ gleich

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} df \cdot dt \quad (1)$$

In dieser Gleichung ist n eine Koordinate auf der Normalen zum Flächenelement df des Körpers, deren positiver Teil gegen die Umgebung gerichtet ist.

Die gesamte von dem Körper in der Zeit dt abgegebene Wärme wird durch Integration der rechten Seite der Gleichung (1) über die Oberfläche des Körpers erhalten. Es wird vielfach in der Literatur behauptet, die Wärmeabgabe eines Körpers habe drei Ursachen [2]: die Strahlung, die Wärmeleitung und die Konvektion. Man sagt, durch den Auftrieb der erwärmten Luft oder durch einen künstlichen Luftstrom kommen immer wieder kalte Teilchen mit der Oberfläche des Körpers in Berührung, die von dort Wärme abführen. Diese Teilung der Wärmeabgabe in Leitung und Konvektion erweckt den Anschein, als hätte man es mit zwei unabhängigen Erscheinungen zu tun. Man muss daraus schliessen, dass Wärme auch durch Konvektion ohne Mitwirkung der Leitung übertragen werden könnte. Dem ist aber nicht so. Die Sachlage ist die, dass der Ansatz der Gleichung (1) für Wärmeleitung und Konvektion gilt. Ist die Wärmeleitfähigkeit des umgebenden Mediums null, dann wird keine Wärme durch Leitung und auch keine durch künstliche Konvektion übertragen. Besitzt das umgebende Medium dagegen eine endlich Wärmeleitfähigkeit, so wird, abgesehen von der Strahlung, alle Wärme durch Leitung abgegeben. Aber die Grösse der abgeleiteten Wärme wird durch die Strömung des Mediums vergrössert, da durch sie der Faktor $\partial T/\partial n$, also das Temperaturgefälle an der Oberfläche des Körpers vergrössert wird. Wird die Strömung der Umgebung durch den Auftrieb erzeugt, so möge sie natürliche Strömung oder natürliche Konvektion genannt werden. Wird die Bewegung der Luft durch äussere Kräfte erzeugt, so rede ich von einer künstlichen Konvektion. Findet keine Strömung statt, so möge von einer Wärmeabgabe durch reine Wärmeleitung gesprochen werden. Demzufolge sind, abgesehen von der Strahlung, die folgenden vier Fälle der Wärmeübertragung möglich:

1. Wärmeabgabe durch reine Wärmeleitung,

2. Wärmeabgabe durch natürliche Konvektion.

3. Wärmeabgabe durch künstliche Konvektion.

4. Wärmeabgabe durch natürliche und künstliche Konvektion.

Um nach Gleichung (1) die Wärmeabgabe des Körpers berechnen zu können, muss das Temperaturgefälle an jeder Stelle seiner Oberfläche bekannt sein. Dieses kann durch die Integration der massgebenden Differentialgleichungen erhalten werden.

Es seien x , y und z die drei Achsen eines rechtwinkligen Achsenkreuzes, dessen negative z -Achse in die Richtung der Erdschwere falle.

Ferner sei

η die Zähigkeitszahl,

λ die Wärmeleitfähigkeit,

ρ die Dichte (Masse der Raumeinheit),

c die spezifische Wärme der Masseneinheit,

T die Temperatur,

p der statische Druck,

t die Zeit,

u die Geschwindigkeitskomponente in der X -Richtung,

v die Geschwindigkeitskomponente in der Y -Richtung,

w die Geschwindigkeitskomponente in der Z -Richtung.

Zunächst werde die Kühlung eines Körpers durch die natürliche Konvektion einer ihn umgebenden tropfbaren oder elastischen Flüssigkeit unter einer Reihe von vereinfachenden Annahmen besprochen. Die Wärmeleitfähigkeit und die Zähigkeit einer Flüssigkeit sind von der Temperatur abhängig; sie sollen aber zunächst konstant gesetzt werden. Durch die Änderung der Masse ρ mit der Temperatur erleiden die heisseren Teilchen einen Auftrieb. Man kann dann näherungsweise diesen Auftrieb, den ein Flüssigkeitsteilchen erfährt, statt seines Gewichtes als Massenkraft in der Richtung der Z -Achse einführen. Durch diesen Ansatz wird die potentielle Energie vernachlässigt und demzufolge

der Druck in grosser Entfernung vom Körper gleich, also unabhängig von z gesetzt. Der Druck p möge von diesem Druck aus gezählt werden. Die Temperatur der Umgebung sei T_0 und die Übertemperatur an einer Stelle Θ , so dass $T = T_0 + \Theta$ wird. An der Oberfläche des Körpers sei $\Theta = \Theta_w$. Ist der Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit an einer Stelle r , so ist dort der Auftrieb

$$Z = g\rho r\Theta \quad (2)$$

wenn g die Erdbeschleunigung bedeutet.

Unter diesen Voraussetzungen lauten die Bewegungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ = - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ = - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ = - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g r \Theta \end{aligned} \right\} (3)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten müssen ausserdem noch die Kontinuitätsgleichung erfüllen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

Wendet man auf die in einem Raumteil enthaltene Energie den ersten Hauptsatz an, so erhält man noch folgende Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \rho c \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} + w \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) \\ = \lambda \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} (5)$$

In dieser Gleichung sind die Reibungswärme

und das Druckgefälle vernachlässigt. Diese fünf Gleichungen genügen zur Bestimmung der fünf Grössen Θ , u , v , w und p , abhängig von den Koordinaten. Die Lösung hat dabei noch folgende Grenzbedingungen zu erfüllen:

In grosser Entfernung vom Körper müssen Θ , u , v , w und p null sein.

An der Körperoberfläche muss u , v , $w = 0$ und $\Theta = \Theta_w$ sein.

Wenn es auch nicht gelingt, diese Gleichungen selbst für den einfachsten Fall zu integrieren, so lassen sich doch auf Grund von Ähnlichkeitsbetrachtungen Ergebnisse von praktischer Wichtigkeit entwickeln. Es werden damit die Bedingungen gewonnen, unter denen die Abkühlung ähnlich erfolgt. Kennt man für einen Fall die abgegebene Wärme, so lässt sie sich aus diesem für einen ähnlichen berechnen. Es sollen zwei Fälle I und II betrachtet werden. Werte des ersten mögen mit dem Index 1 und solche des zweiten mit 2 bezeichnet werden. Die beiden sich abkühlenden Körper müssen geometrisch ähnlich sein. Ihre linearen Dimensionen mögen im Verhältnis von α zueinander stehen. Sind d_1 und d_2 ähnlich gelegene Strecken auf ihnen so ist

$$d_2 = \alpha d_1.$$

Um eine ähnliche Strömung zu erhalten, müssen die Koordinaten ähnlich gelegener Punkte auch das Verhältnis α haben, also muss sein

$$x_2 = \alpha x_1, \quad y_2 = \alpha y_1, \quad z_2 = \alpha z_1.$$

Ähnliche Zeiten mögen im Verhältnis β stehen, so dass

$$t_2 = \beta t_1$$

wird. Das Verhältnis der Drücke an ähnlich gelegenen Stellen sei δ

$$p_2 = \delta p_1.$$

Die Geschwindigkeiten von ähnlich gelegenen Stellen stehen im Verhältnis μ , also

$$u_2 = \mu u_1, \quad v_2 = \mu v_1, \quad w_2 = \mu w_1.$$

Ausserdem mögen die Konstanten der Differentialgleichungen bzw. der Grenzen die folgenden festen Verhältnisse besitzen:

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \gamma\rho_1 \\ \eta_2 &= \varepsilon\eta_1, \\ c_2 &= \zeta c_1, \\ \lambda_2 &= \xi\lambda_1, \\ \Theta_2 &= \varphi\Theta_1, \\ \Theta_{w_2} &= \varphi\Theta_{w_1}, \\ r_2 &= \nu r_1, \\ g_2 &= \chi g_1. \end{aligned}$$

Es ist jetzt die Frage zu entscheiden, ob es überhaupt zwei Strömungen 1 und 2 gibt, die geometrisch, mechanisch und thermisch ähnlich sind, d. h. solche, bei denen die Verhältniszahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \mu, \xi, \nu, \varphi$ und χ konstante Werte erhalten können. Weiter ist zu entscheiden, wenn die erste Frage bejaht wird, ob die Zahlen beliebig gewählt werden können. Die fünf Differentialgleichungen (3), (4) und (5) gelten natürlich für beide Fälle. Man braucht nur überall die Indizes 1 und 2 anzufügen. So lautet z. B. die dritte Gleichung (3) für den Fall I

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \right) \\ = - \frac{\partial p_1}{\partial z_1} + \eta_1 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1^2} \right) \\ + \rho_1 g_1 r_1 \Theta_1 \end{aligned} \quad (3a)$$

und für den Fall II

$$\begin{aligned} \rho_2 \left(\frac{\partial w_2}{\partial t_2} + u_2 \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial w_2}{\partial y_2} + w_2 \frac{\partial w_2}{\partial z_2} \right) \\ = - \frac{\partial p_2}{\partial z_2} + \eta_2 \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial z_2^2} \right) \\ + \rho_2 g_2 r_2 \Theta_2 \end{aligned} \quad (3b)$$

In der Gleichung (3b) ersetzen wir jetzt auf Grund obiger Verhältnisse die Werte mit dem Index 2 durch jene mit dem Index 1. Dann wird

$$\begin{aligned} \gamma\rho_2 \left(\beta \frac{\partial w_1}{\partial t_1} + \mu u_1 \frac{\mu \partial w_1}{\alpha \partial x_1} + \mu v_1 \frac{\mu \partial w_1}{\alpha \partial y_1} \right. \\ \left. + \mu w_1 \frac{\mu \partial w_1}{\alpha \partial z_1} \right) = - \frac{\delta \partial p_1}{\alpha \partial x_1} + \varepsilon\eta_1 \left(\frac{\mu \partial^2 w_1}{\alpha^2 \partial x_1^2} \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{\mu \partial^2 w_1}{\alpha^2 \partial y_1^2} + \frac{\mu \partial^2 w_1}{\alpha^2 \partial z_1^2} \right) + \gamma\chi\nu\varphi\rho_1 g_1 r_1 \Theta_1 \quad (3c)$$

In entsprechender Weise kann man die vier übrigen Differentialgleichungen des Falles II in solche für den Fall I transformieren. Denn die Gleichung (3c) enthält nur Veränderliche mit dem Index 1. Soll nun obiger Ähnlichkeitsansatz möglich sein, so muss die Gleichung (3c) mit der Gleichung (3a) identisch sein. Das tritt aber nur ein, wenn zwischen den Verhältniszahlen folgende Beziehungen bestehen:

$$\frac{\gamma\mu}{\beta} = \frac{\gamma\mu^2}{\alpha} = \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\varepsilon\mu}{\alpha^2} = \gamma\chi\nu\varphi \quad (6)$$

Es lassen sich dann auch die übrigen zwei Bewegungsgleichungen für den Fall II in jene des Falles I transformieren; ebenso die Kontinuitätsgleichung. Damit die Umföhrung auch für die Wärmeleitgleichung (5) besteht, muss noch folgende Gleichung erfüllt sein:

$$\frac{\gamma\zeta\varphi}{\beta} = \frac{\gamma\zeta\mu\varphi}{\alpha} = \frac{\xi\varphi}{\alpha^2} \quad (7)$$

Die Gleichungen (6) und (7) zeigen, dass zwischen den 11 Verhältniszahlen $\alpha \dots \chi$ die Beziehungen

$$\varepsilon = \mu\gamma\alpha \quad (8)$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\mu} \quad (9)$$

$$\delta = \mu^2\gamma \quad (10)$$

$$\varepsilon^2 = \alpha^3\gamma^2\chi\nu\varphi \quad (11)$$

$$\xi = \varepsilon\zeta \quad (12)$$

bestehen müssen. Man sieht also, dass ähnliche Strömungen möglich sind, dass aber wegen der fünf Beziehungen 8–12 nur fünf Verhältniszahlen willkürlich gewählt dürfen. Es müssen, damit Ähnlichkeit vorhanden ist, die fünf Gleichungen 8–12 erfüllt sein.

Die Grenzbedingungen verlangen nur $\Theta_{w_2} = \varphi\Theta_{w_1}$. Die Verhältniszahl μ der Geschwindigkeiten darf sich beliebig ergeben, da die Geschwindigkeit in den Grenzbedingungen nicht

vorkommt. Da wir zunächst nur den Beharungszustand beobachten und die abgegebene Wärme während eines grossen Zeitabschnittes betrachten wollen, so dass die Schwingungsdauer periodischer Schwankungen der Strömung, wie sie infolge von Wirbelablösungen eintreten können, verschwindend klein erscheint, wird diese unabhängig von der Zeit sein. Es können deshalb μ , β und δ den Gleichungen (8), (9), (10) entsprechend gewählt werden. Die anderen Verhältniszahlen α , γ , ε , ζ , ξ , ν , φ und χ hängen von den Materialkonstanten und Grenzbedingungen ab. Zwischen ihnen müssen die Bedingungsgleichungen (11) und (12) bestehen. Führen wir in diese beiden Gleichungen die Zustandsgrössen der Fälle I und II ein, so erhält man

$$\frac{d_1^3 \rho_1^2 g_1 r_1 \Theta_{w1}}{\eta_1^2} = \frac{d_2^3 \rho_2^2 g_2 r_2 \Theta_{w2}}{\eta_2^2} \quad (11a)$$

und

$$\frac{\lambda_1}{c_1 \eta_1} = \frac{\lambda_2}{c_2 \eta_2} \quad (12a)$$

Sind diese Gleichungen erfüllt, dann erfolgt die Wärmeabgabe in ähnlicher Weise. Man kann nun natürlich noch mehr Fälle zum Vergleich heranziehen, die aber alle dieselben Werte für die durch die Gleichungen (11a) und (12a) definierten Brüche besitzen müssen. Dadurch erhält man die allgemeinsten Bedingungen, die aussagen, dass

$$\frac{d^3 \rho^2 g r \Theta_w}{\eta^2} = B \quad (11b)$$

und

$$\frac{\lambda}{c \eta} = C, \quad (12b)$$

dass also für vergleichbare Fälle die Brüche (11b) und (12b) konstante Zahlen sein müssen. Die Zahlen B und C können natürlich jeden beliebigen positiven Wert annehmen. Für jedes zusammengehörige Wertepaar erhält man eine Reihe ähnlicher Fälle. Kennt man nun z. B. für einen Fall die vom Körper in der Zeiteinheit

abgegebene Wärme Q_1 , z.B. aus einem Versuch, so kann man die Wärmeabgabe Q_2 , für einen ähnlichen Fall aus Q_1 in folgender Weise berechnen. Nach (1) ist

$$dQ_1 = -\lambda_1 \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial n_1} \cdot df_1 \quad (13)$$

die von einem Oberflächenelement des Körpers I in der Zeiteinheit abgegebene Wärme. Die in der gleichen Zeit von einem ähnlich gelegenen Teil des Körpers II abgegebene Wärme ist

$$dQ_2 = -\lambda_2 df_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial n_2} \quad (14)$$

Setzen wir in diese Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 &= \xi \lambda_1 \\ df_2 &= \alpha^2 df_1 \\ \Theta_2 &= \varphi \Theta_1 \\ n_2 &= \alpha n_1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ein, so wird

$$dQ_2 = -\xi \alpha \varphi \lambda_1 df_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial n_1} \quad (16)$$

Das Verhältnis der Gleichungen (16) und (13) gibt

$$dQ_2 = dQ_1 \cdot \xi \alpha \varphi \quad (17)$$

Nun ist aber

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{\Theta_{w2}}{\Theta_{w1}} \\ \alpha &= \frac{d_2}{d_1} \\ \xi &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

und damit wird

$$dQ_2 = dQ_1 \cdot \frac{d_2 \cdot \Theta_{w2} \cdot \lambda_2}{d_1 \cdot \Theta_{w1} \cdot \lambda_1} \quad (19)$$

Integriert man nun über die ganze Oberfläche des Körpers, so wird die Wärmeabgabe des

zweiten Körpers

$$Q_2 = Q_1 \cdot \frac{d_2 \Theta_{w2} \lambda_2}{d_1 \Theta_{w1} \lambda_1} \quad (20)$$

Damit diese Gleichung gilt, müssen aber die Gleichungen (11a) und (12a) erfüllt sein. Nun kann man in der Gleichung (20) die Glieder mit gleichem Index auf eine Seite bringen :

$$\frac{Q_2}{d_2 \Theta_{w2} \lambda_2} = \frac{Q_1}{d_1 \Theta_{w1} \lambda_1} \quad (20a)$$

Betrachtet man nun noch mehrere Fälle, so folgt, wenn sie so gewählt sind, dass in Gleichung (11b) und (12b) B und C dieselben Werte bleiben, dass dann auch

$$\frac{Q}{\lambda d \Theta_w} = D \quad (20b)$$

konstant bleibt. Wenn man also die Grössen d , ρ , g , r , Θ_w , η , λ und c ändert, aber so, dass immer B und C je denselben konstanten Wert ergeben, so bleibt auch D konstant, und die abgegebene Wärme wird

$$Q = \lambda d \Theta_w \cdot D \quad (20c)$$

Kennt man also aus einem Versuch die Zahlen B , C und D , kann man die Wärmeabgabe Q für eine unendliche Reihe von Fällen berechnen. Es möge z. B. die Wärmeabgabe eines Körpers in der Atmosphäre vom gegebenen Zustand gemessen worden sein zu $Q_1 = 120$ kcal. h^{-1} . Die Temperaturdifferenz sei $10^\circ C$ und die Grösse des Körpers $d = 0,2$ m gewesen. Was sagt nun obige Beziehung für die Abkühlung unter anderen Bedingungen aus? Betrachten wir die Abkühlung in derselben Atmosphäre, so sind in den Gleichungen (11b), (12b) und (20c) λ , c , η , ρ , g , r konstant. Damit ist die Gleichung (12b) ohne weiteres befriedigt. Für alle möglichen Fälle muss noch Gleichung (11b) erfüllt werden. Es muss also $\Theta_w \cdot d^3$ konstant sein und gleich $10 \cdot 0,2^3 = 0,08$. Dafür ist nach Gleichung (20)

$$Q_2 = 120 \cdot \frac{d_2 \Theta_{w2}}{0,2 \cdot 10} = 60 d_2 \Theta_{w2}.$$

Wählt man also d_2 z. B. 0,1, so ist Θ_{w2} 80 zu setzen, und dafür wird

$$Q_2 = 60 \cdot 0,080 = 480 \text{ kcal}$$

Weitergehend kann man nun B und C beliebig wählen. Für jedes zusammengehörige Wertepaar B , C ergibt sich ein Wert von D . Demzufolge ist D eine Funktion von B und C

$$D = \Phi(B, C) \quad (21)$$

Damit wird die Wärmeabgabe eines Körpers

$$Q = \lambda d \Theta_w \Phi \left(\frac{\lambda}{c\eta}, \frac{d^3 \rho^2 g r \Theta_w}{\eta^2} \right) \quad (22)$$

Das ist der allgemeinste Ausdruck, den man für die Wärmeabgabe eines in eine Flüssigkeit getauchten Körpers unter den gemachten Voraussetzungen aufstellen kann. Er zeigt, dass der stündliche Wärmeverlust abhängig ist von :

- der Grösse des Körpers,
- der Übertemperatur gegen die Umgebung,
- der Wärmeleitzahl der Flüssigkeit,
- der Zähigkeitszahl der Flüssigkeit,
- der Dichte der Flüssigkeit,
- der spez. Wärme der Flüssigkeit,
- dem Ausdehnungskoeffizienten der Flüssigkeit
- und von der Erdbeschleunigung.

Aber diese Abhängigkeit ist keine willkürliche für alle unabhängig Veränderlichen, sondern durch die Gleichung (21) wird die Zahl der Unabhängigen auf zwei reduziert. Die experimentelle Festlegung der Funktion Φ wird dadurch wesentlich vereinfacht. Man braucht bloss zwei Serien von Versuchen auszuführen, bei denen je ein in den Brüchen B und C enthaltener Faktor geändert wird, z. B. λ und Θ_w oder c und d , und erhält sofort die Abhängigkeit der Wärme Q auch von jenen Grössen, die bei den Versuchen gar nicht geändert wurden.

In der Praxis hat es sich als sehr zweckmässig

erwiesen, zur Berechnung der abgegebenen Wärme die sog. Wärmeübergangszahl einzuführen. Man versteht darunter jene Wärmemenge α , die die Flächeneinheit pro Stunde und pro 1° Übertemperatur abgibt. Es wird damit die in der Zeiteinheit abgegebene Wärme

$$Q = \alpha \cdot F \cdot \Theta_w \tag{23}$$

oder

$$\alpha = \frac{Q}{F \Theta_w} \tag{23a}$$

Da F proportional d^2 ist, wird nach Gleichung (22)

$$\alpha = \frac{\lambda}{d} \cdot \Phi \left(\frac{\lambda}{c_p \eta}, \frac{d^3 \rho^2 g r \Theta_w}{\eta^2} \right) \tag{24}$$

Es möge nun angenommen werden, die abkühlende Flüssigkeit sei ein Gas, z. B. atmosphärische Luft, dann lässt sich r aus dem Gasgesetz berechnen. Es ist, wenn ρ_0 die Dichte im Unendlichen bei der Temperatur T_0 ist,

$$\rho = \frac{\rho_0 T_0}{T_0 + \Theta} \tag{25}$$

Daraus ergibt sich der Auftrieb zu

$$g(\rho_0 - \rho) = \frac{g \rho_0 \Theta}{T_0 + \Theta} = g \rho_0 \Theta r \tag{26}$$

und der Ausdehnungskoeffizient zu

$$r = \frac{1}{T_0 + \Theta} \tag{27}$$

Bei der Ableitung der Gleichung (24) war

Bei Gasen trifft dies demnach nur für kleine Temperaturüberschüsse Θ_w zu; hier wird

$$r = \frac{1}{T_0} \tag{27a}$$

Für c ist für Gase die spez. Wärme bei konstantem Druck also c_p einzusetzen. Ersetzt man noch die Dichte ρ durch das spez. Gewicht γ so wird die Wärmeübergangszahl für die Abkühlung eines Körpers in einem ruhenden Gase bei kleiner Übertemperatur

$$\alpha = \frac{\lambda}{d} \Phi \left(\frac{\lambda}{c_p \eta}, \frac{d^3 \gamma^2 \Theta_w}{g \eta^2 T_0} \right) \tag{28}$$

Nun folgt in Übereinstimmung mit Versuchen aus der kinetischen Gastheorie

$$\lambda = \varepsilon c_p \eta \tag{29}$$

worin ε für ein Gas eine Konstante ist. In einer früheren Arbeit* habe ich gezeigt, dass ε nur von der Atomzahl in folgender Weise abhängig ist:

Atomzahl	1	2	3	4	5	6
ε	2,50	1,74	1,57	1,23	1,28	1,24

In der Formel (29) kann man nun c_p durch c_p ersetzen; nach einer Formel der Wärmelehre ist

$$c_p = c_v \kappa \tag{29a}$$

worin κ auch nur von der Atomzahl abhängt, in folgender Weise:

Atomzahl	1	2	3	4	5	6
κ	1,66	1,40	1,27	1,28	1,28	1,25.

Setzt man den Wert von Gleichung (29a) in Gleichung (29) ein, so wird

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{\kappa} \cdot c_p \cdot \eta \tag{29b}$$

oder

$$\frac{\lambda}{c_p \eta} = \frac{\varepsilon}{\kappa}$$

Atomzahl	1	2	3	4	5	6
$\frac{\varepsilon}{\kappa}$	1,5	1,24	1,24	0,96	1,00	0,99.

Es ist also die Grösse C nur von der Atomzahl des Gases abhängig und schwankt da nur zwischen 1,5 und 1. Erstreckt man jetzt die Betrachtung nur auf Gase gleicher Atomzahl, z. B. auf zweiatomige Gase, Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff, Luft usw., so bleibt C konstant, und die Wärmeübergangszahl α ist nur von B abhängig. Es vereinfacht sich die Formel dann in

$$\alpha = \frac{\lambda}{d} f \left(\frac{d^3 \gamma^2 \Theta_w}{g \cdot \eta^2 T_0} \right) \tag{30}$$

Bringt man den Faktor λ/d auf die linke Seite

* a.a.O.

und bezeichnet man den Bruch

$$\frac{\alpha d}{\lambda} \text{ mit } A \quad (31)$$

so wird

$$A = f(B) \quad (30a)$$

d. h. das Problem der Abkühlung eines festen Körpers von gegebener Gestalt in einem ruhenden, aus einem zweiatomigen Gase bestehenden Gasraum ist für kleine Temperaturdifferenzen zurückgeführt auf die Bestimmung einer Funktion von einer unabhängigen Veränderlichen. Man braucht also nur die Abhängigkeit des Wärmeüberganges von einem der fünf Faktoren zu kennen, aus dem B gebildet ist. Damit ist die Abhängigkeit für die übrigen gegeben. Würde man z. B. die lineare Dimension eines Körpers ändern und in Luft bei gleicher Übertemperatur den Wärmeübergang messen und würde man z. B. α unabhängig von der Dimension, also von d finden, dann folgte daraus

$$\alpha = C \frac{\lambda}{d} \left(\frac{d^3 \gamma^2 \Theta_w}{g \eta^2 T_0} \right)^{\frac{1}{3}} = C \frac{\lambda \gamma^{\frac{2}{3}} \Theta_w^{\frac{1}{3}}}{g^{\frac{1}{3}} \eta^{\frac{2}{3}} T_0^{\frac{1}{3}}} \quad (32)$$

$$= C \cdot \lambda \sqrt[3]{\left(\frac{\Theta_w \cdot \gamma_0^2 \cdot p^2 \cdot 288^2}{g \cdot \eta^2 \cdot T_0^3} \right)} \quad (32a)$$

Hierin ist C eine aus einem Versuch zu entnehmende Konstante und γ_0 das spez. Gewicht des Gases im Normalzustand (15°, 1 at).

Oder fände man, wenn man einen Körper bei verschiedenen Temperaturen untersucht, dass α proportional $\Theta_w^{\frac{2}{3}}$, so folgt aus (30)

$$\alpha = C_1 \frac{\lambda}{d} \left(\frac{d^3 \gamma^2 \Theta_w}{g \eta^2 T_0} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (32b)$$

$$= C_1 \lambda \sqrt[4]{\left(\frac{\Theta_w \cdot \gamma_0^2 \cdot p^2 \cdot 288^2}{g \cdot \eta^2 \cdot d \cdot T_0^3} \right)} \quad (32c)$$

Leider liegen keine Versuchsreihen vor, bei denen die Temperaturdifferenz so gering gewählt war, dass die Formel (30) dafür gelten würde.

Tatsächlich ist die Temperaturdifferenz immer beträchtlich. Damit sind denn auch die Dichte, die Wärmeleitzahl, die Zähigkeitszahl und der Ausdehnungskoeffizient von der Temperatur abhängig, Größen, die bei der Ableitung der Formel (30) als unveränderlich angenommen wurden.

Diese einschränkenden Voraussetzungen sollen jetzt fallen gelassen werden.

Auf Grund folgender Überlegung kann der Formel (30) auch für diesen allgemeinen Fall eine näherungsweise Gültigkeit zugesprochen werden. Es ist gewiss, dass die Übertemperatur Θ in geringer Entfernung von der Körperoberfläche schon den Wert Null hat, dort also die Umgebungstemperatur bestehen bleibt. Der Temperaturabfall beschränkt sich dann auf eine dünne Schicht am Körper, und es erscheint näherungsweise richtig, wenn wir in die Differentialgleichung die von der Temperatur abhängigen Größen konstant, und zwar jede gleich ihrem durch Integration über den Temperaturunterschied Θ_w gewonnenen Mittelwert setzen. Wir erhalten so

$$\alpha = \frac{\lambda_m}{d} \Phi \left(\frac{\lambda_m}{c_{pm} \eta_m}, \frac{d^3 \gamma_m^2 \Theta_w}{g \eta_m^2 T_m} \right) \quad (28a)$$

Ist T_0 die Temperatur der Umgebung und T_w die Wandtemperatur, so ist nach unserer Festsetzung

$$\frac{1}{T_m} = \frac{1}{\Theta_w} \int_{T_0}^{T_w} \frac{dT}{T} = \frac{\ln(T_w/T_0)}{\Theta_w}$$

oder

$$T_m = \frac{\Theta_w}{\ln(T_w/T_0)} = \frac{T_w - T_0}{\ln(T_w/T_0)}$$

ferner

$$\lambda_m = \frac{1}{\Theta_w} \int_{T_0}^{T_w} dT, \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \eta_m &= \frac{1}{\Theta_w} \int_{T_0}^{T_w} \eta \, dT \\
 c_{pm} &= \frac{1}{\Theta_w} \int_{T_0}^{T_w} c_p \, dT \\
 \text{und} \\
 \gamma_m &= \frac{1}{\Theta_w} \int_{T_0}^{T_w} \gamma_m \, dT = \frac{\gamma_0 T_0}{\Theta_w} \int_{T_0}^{T_w} \frac{dT}{T} \\
 &= \gamma_0 \frac{T_0}{T_m}
 \end{aligned} \right\} (33)$$

In grosser Entfernung vom Körper sei

$$\left. \begin{aligned}
 T &= T_0 \\
 \rho &= \rho_0 \\
 \lambda &= \lambda_0 \\
 \eta &= \eta_0 \\
 c_p &= c_{p0} \\
 u &= 0 \\
 v &= 0 \\
 w &= 0
 \end{aligned} \right\} (37)$$

An der Oberfläche sei

$$\left. \begin{aligned}
 u &= 0 & \eta &= \eta_w \\
 v &= 0 & \lambda &= \lambda_w \\
 w &= 0 & \rho &= \rho_w \\
 & & c_p &= c_{pw}
 \end{aligned} \right\} (38)$$

Nach dem Gasgesetz ist nun

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{T_0}{T} \tag{39}$$

worin γ_0 das spezifische Gewicht des Gases bei der Umgebungstemperatur T_0 ist.

Es lässt sich nun für diesen Fall aus den Differentialgleichungen auch eine genaue Formel ableiten. Wegen der Temperaturveränderlichkeit von ρ, λ, η, c_p erweitern sich jetzt die Gleichungen (3), (4) und (5) in

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{d\eta}{dT} \left[\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right]
 \end{aligned} \tag{34a}$$

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
 &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{d\eta}{dT} \left[\frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right]
 \end{aligned} \tag{34b}$$

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + (\rho_0 - \rho) g + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{d\eta}{dT} \left[\frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right]
 \end{aligned} \tag{34c}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \tag{35}$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \tag{36}$$

und

$$\rho_w = \rho_0 \cdot \frac{T_0}{T_w} \quad (39a)$$

wenn man die geringe Änderung des Druckes vernachlässigt. Die Änderung von η , λ , c_p mit der Temperatur soll nun durch ein Potenzgesetz dargestellt werden, was, wie nachher an einem Beispiel gezeigt werden soll, in weiten Grenzen möglich ist. Es sei also

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^m \\ \lambda &= \lambda_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^n \\ c_p &= c_{p0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^r \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Betrachtet man wie oben wieder zwei ähnliche Systeme, so folgt zunächst

$$\varphi = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_{w2}}{T_{w1}} \quad (41)$$

oder

$$\frac{T_{w1}}{T_{01}} = \frac{T_{w2}}{T_{02}} = D \quad (41a)$$

d. h. Ähnlichkeit kann nur bestehen, wenn das Verhältnis von absoluter Oberflächen- und Raumtemperatur konstant ist. Aus den Differentialgleichungen selbst folgt die Konstanz der Verhältnisse

$$\frac{\lambda}{c_p \eta} = C \quad (41b)$$

$$\frac{d^3 \rho^2 g}{\eta^2} = B \quad (41c)$$

Es wird deshalb A ein Funktion der drei Verhältniszahlen $B C D$, also

$$A = \Phi(B, C, D) \quad (42)$$

oder

$$\alpha = \frac{\lambda}{d} \Phi \left(\frac{d^3 \rho^2 g}{\eta^2}, \frac{\lambda}{c_p \eta}, \frac{T_w}{T_0} \right) \quad (43)$$

Die Gleichung (43) gibt also die Beziehung für die Abkühlung eines heissen Körpers in einem Gase bei beliebiger Temperaturdifferenz. Es ist dabei gleichgültig, ob man die Wert von λ , ρ , η , c_p bei T_w oder T_0 einsetzt, denn jede dieser Grössen kann durch Multiplikation mit einer Potenz von T_w/T_0 aus dem Wert an einer von beiden Stellen auf jenen an der andern Stelle überführt werden. Da ja A vom Verhältnis $D = T_w/T_0$ abhängt, bleibt die Gleichung (43) für alle diese Fälle erfüllt.

Es möge jetzt geprüft werden, ob die obige Näherungsgleichung (28a) die Bedingung der Gleichung (43) erfüllt. Es müssen zunächst die durch die Gleichungen (40) gegebenen Beziehungen benutzt werden, um die Mittelwerte nach Gleichung (33) auszurechnen. Es wird

$$\left. \begin{aligned} \lambda_m &= \lambda_0(m+1) \frac{(T_w/T_0)^{m+1} - 1}{(T_w/T_0) - 1} \\ &= \lambda_0(m+1) \frac{D^{m+1} - 1}{D - 1} \\ \eta_m &= \eta_0(n+1) \frac{D^{n+1} - 1}{D - 1} \\ c_{pm} &= c_{p0}(r+1) \frac{D^{r+1} - 1}{D - 1} \\ T_m &= T_0 \cdot \frac{D - 1}{\ln D} \end{aligned} \right\} \quad (33a)$$

und

$$\gamma_m = \frac{\gamma_0 \ln D}{D - 1}$$

Setzt man nun diese Werte in die Gleichung (28a) ein, so geht sie über in

$$\alpha = \frac{\lambda_0}{d} (m+1) \frac{D^{m+1} - 1}{D - 1} \cdot \Phi \left[\frac{\lambda_0(m+1)(D^{m+1} - 1)(D - 1)}{c_{p0}\eta_0(n+1)(r+1)(D^{n+1} - 1)(D^{r+1} - 1)}, \frac{d^3 \gamma_0^2 \ln D \cdot (D - 1)^3}{g\eta_0^2(n+1)^2(D^{n+1} - 1)^2} \right] \quad (28b)$$

Sie sagt aus, dass A abhängig von B , C und D ist, was zu beweisen war. Natürlich stellt Gleichung (28b) nur einen speziellen Fall der viel allgemeineren Beziehung (43) dar. Wenn die Gleichung (28b) den Versuchen genügt, verliert sie infolge dieses Beweises den in ihrer Ableitung liegenden Näherungscharakter.

Die Gleichung (28a) soll nun an einem Beispiel geprüft werden. Für einen in ruhender Luft horizontal aufgehängten Kreiszyylinder liegt eine Reihe von Versuchen vor. Beschränkt man sich zunächst darauf, eine Formel für den Wärmeübergang an zweiatomige Gase aufzustellen, so vereinfacht sich die Gleichung (28a) wegen der Konstanz von C in

$$\alpha = \frac{\lambda_m}{d} \Phi \left(\frac{d^3 \gamma_m^2 \Theta_w}{g \eta_m^2 T_m} \right) \quad (44)$$

oder in

$$A = \Phi(B) \quad (44a)$$

wobei

$$A = \frac{\alpha d}{\lambda_m} \quad (45)$$

und

$$B = \frac{d^3 \gamma_m^2 \Theta_w}{g \eta_m^2 T_m} \quad (46)$$

ist.

Zur Bestimmung der Funktion Φ genügt eine Versuchsreihe, bei der sich B in möglichst weiten Grenzen ändert. B kann nun auf die verschiedenste Weise geändert werden. Man kann das durch eine gemeinsame oder getrennte Änderung von die Grösse B bildenden Faktoren erreichen. Betrachtet man nur die Abkühlung in Luft, so kann man den Durchmesser d des Rohres oder den Druck der Luft, dann die Lufttemperatur T_0 und die Wandtemperatur T_w ändern. Die weiteste Änderung von B tritt ein, wenn man den Durchmesser d ändert, da er in der dritten Potenz vorkommt. Führt man also eine Versuchsreihe aus, bei der nur d geändert wird, während p , T_0 , T_w und damit

auch Θ_w konstant bleiben, so erhält man die Funktion Φ und damit die Lösung unseres Problems. Ohne also eine Versuchsreihe bei veränderlicher Temperaturdifferenz ausgeführt zu haben, ist damit auch die Abhängigkeit des Wärmeübergangs von der Temperaturdifferenz bekannt. Es liegen nun Versuche vor, bei denen d , p und T_w geändert wurden, wodurch eine Prüfung der Gleichung (44) und eine Bestimmung der Funktion Φ möglich ist.

Die Gleichung (44) setzt die Kenntnis der Wärmeleitfähigkeit und Zähigkeit der Luft voraus. Nach den Lehren der kinetischen Gastheorie ist η unabhängig vom Druck und nur abhängig von der Temperatur. Diese Temperaturabhängigkeit wird beeinflusst von dem Gesetz, das man über die Anziehung der Moleküle einführt. Im Temperaturbereich von -180 bis 1200°C stimmt die Formel von Sutherland sehr gut mit den Versuchen überein. Sie lautet:

$$\eta = \eta_0 \frac{1 + (C/273)}{1 + (C/T)} \sqrt{\left(\frac{T}{273}\right)} \quad (47)$$

C und η_0 sind für ein Gas konstant. Für Luft ist

$$C = 117 \quad (48)$$

und

$$\eta_0 = 1,69 \cdot 10^{-6} \text{ kgf sk m}^{-2} \quad (48a)$$

Nach der Formel (29) lässt sich dann die Wärmeleitzahl berechnen. Es ist

$$\lambda = \varepsilon \cdot c_v \cdot \eta \quad (29)$$

c_v ist die wahre spez. Wärme für die Masseeinheit bei konstantem Druck. Nach Pier ist für Luft die mittlere spezifische Wärme zwischen 0 und t für 1 kg Gewicht

$$\left| c_{vm} \right|_0^t = 0,169 + 0,0000155 t \quad (49)$$

Daraus folgt die wahre spez. Wärme zu

$$c_v = 0,169 + 0,0000310 t \quad (49a)$$

oder wenn man die absolute Temperatur T einführt

$$c_v = 0,1605(1 + 0,000194 T) \quad (49b)$$

Führt man in die Gleichung (29) die Werte der Gleichung (49b) und (47) ein und berücksichtigt man, dass nach den neuesten Versuchen [3] die Wärmeleitzahl der Luft bei 0° gleich

$$\lambda_0 = 0,02036$$

ist, so folgt für die Wärmeleitzahl der Luft die Formel

$$\lambda = \frac{0,00167(1 + 0,000194 T) \sqrt{T}}{1 + (117/T)} \quad (50)$$

Die Werte von η und λ sind in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur in der Zahlentafel 1 und den Schaubildern 1 und 2 zur Darstellung gebracht.

An Stelle von Gleichung (47) ist auch vielfach eine Potenzformel benutzt worden, für Luft mit dem Exponenten $m = 0,765$. Dann erhält man die Formel

$$\eta = \frac{2,30}{10^8} T^{0,765} = \frac{1,69}{10^6} \left(\frac{T}{273}\right)^{0,765} \quad (47a)$$

Zwischen 200 und 800° abs. bleibt der Unterschied beider Formeln unter 3 Prozent.

Die Tabelle 1 enthält ausserdem zur Berechnung der Mittelwerte λ_m und η_m noch die Integrale von λ und η von 0 bis T° abs.

Tabelle 1

T° abs.	$\eta \cdot 10^6$ kgf sk m ⁻²	$\int_0^T \eta dT$	λ kcal h. ⁻¹ m. ⁻¹ °C ⁻¹	$\int_0^T \lambda dT$
100	0,67	33,5	0,0078	0,352
200	1,30	132,0	0,0155	1,505
300	1,82	288,0	0,0220	3,376
350	2,04	384,5	0,0250	4,551
400	2,26	492,0	0,0278	5,871
450	2,46	610,0	0,0306	7,331
500	2,65	738,0	0,0332	8,926
550	2,83	875,0	0,0357	10,648
600	2,99	1021,0	0,0383	12,498
700	3,31	1336,0	0,0430	16,563
800	3,60	1682,0	0,0476	21,093
900	3,87	2056,0	0,0521	26,078
1000	4,13	2456,0	0,0566	31,513
1200	4,61	3330,0	0,0649	43,66
1400	5,04	4073,0	0,0733	57,48
1600	5,44	5343,0	0,0817	72,98
1800	5,82	6469,0	0,0900	90,15
2000	6,18	7669,0	0,0980	108,95
2200	6,51	8938,0	0,1062	129,37

Es liegen vier brauchbare Versuchsreihen vor, von Kennelly, Wright und Bylevelt [4]; Wamsler [5]; Langmuir [6] und Bylevelt [7]. Die Versuchsergebnisse und die daraus

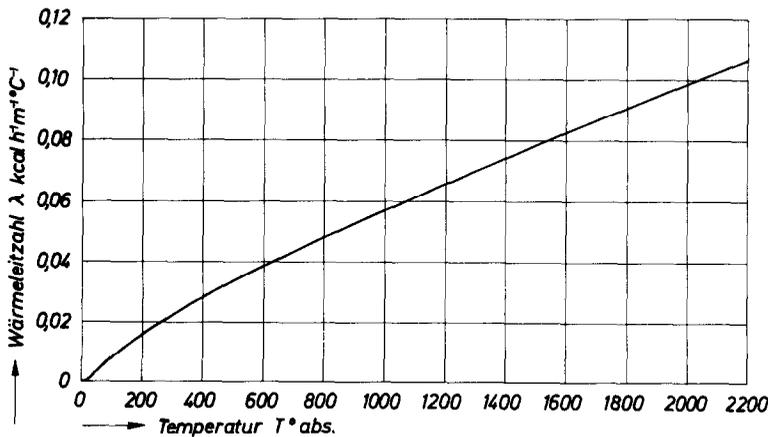


ABB. 1. Die Abhängigkeit der Wärmeleitzahl der Luft von der Temperatur.

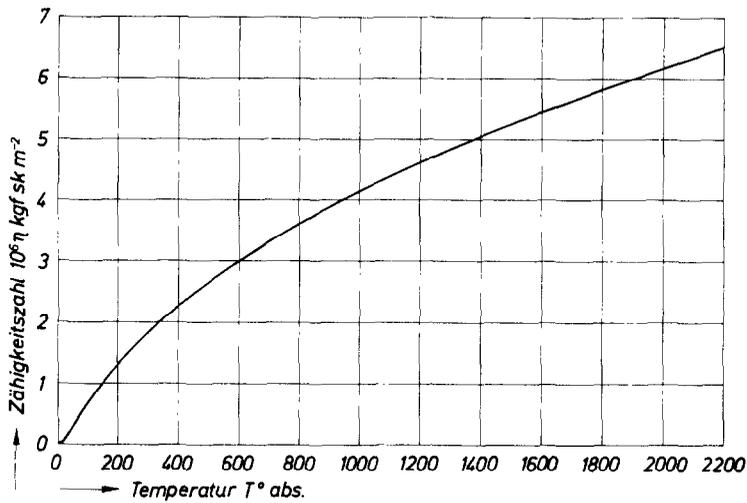


ABB. 2. Die Abhängigkeit der Zähigkeit der Luft von der Temperatur.

Tabelle 2. Versuche von Kennelly, Wright und Bylevelt

Draht- durch- messer m. 10^4	Druck mm kcal.	Über- temperatur θ_w	Wärmeüber- gangszahl α kcal. $\text{h}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$	A	B
1,143	1500	59,6	141	0,695	$3,69 \cdot 10^{-2}$
1,143	750	59,6	115	0,566	$9,22 \cdot 10^{-3}$
1,143	375	59,6	103	0,508	$2,31 \cdot 10^{-3}$
1,143	150	59,6	88,5	0,436	$3,69 \cdot 10^{-4}$
1,143	1500	95,9	142	0,668	$4,69 \cdot 10^{-2}$
1,143	750	95,9	125	0,588	$1,172 \cdot 10^{-2}$
1,143	375	95,9	108	0,508	$2,93 \cdot 10^{-3}$
1,143	150	95,9	91	0,428	$4,69 \cdot 10^{-4}$
1,143	1500	165	153	0,665	$5,35 \cdot 10^{-2}$
1,143	750	165	131	0,570	$1,34 \cdot 10^{-2}$
1,143	375	165	114	0,495	$3,35 \cdot 10^{-3}$
1,143	120	165	93	0,404	$3,43 \cdot 10^{-4}$
2,616	1500	37,8	62	0,717	$3,24 \cdot 10^{-1}$
2,616	750	37,8	48	0,555	$8,11 \cdot 10^{-2}$
2,616	1500	46,4	66	0,758	$3,77 \cdot 10^{-1}$
2,616	750	46,4	55	0,632	$9,42 \cdot 10^{-2}$
2,616	225	46,4	40	0,459	$8,47 \cdot 10^{-3}$
2,616	1500	58,8	73	0,823	$4,40 \cdot 10^{-3}$
2,616	750	58,8	62	0,700	$1,10 \cdot 10^{-1}$
2,616	375	58,5	53	0,598	$2,75 \cdot 10^{-2}$
6,907	1500	18,3	37	1,162	3,33
6,907	750	18,3	30	0,942	$8,23 \cdot 10^{-1}$
6,907	375	18,3	26	0,817	$2,04 \cdot 10^{-1}$
6,907	1500	77,2	42	1,218	9,28
6,907	750	77,2	34	0,996	2,32
6,907	300	77,2	28	0,813	$3,65 \cdot 10^{-1}$
6,907	1500	179,8	46	1,190	11,8
6,907	750	179,8	36	0,931	2,95
6,907	375	179,8	28	0,742	$7,38 \cdot 10^{-1}$
6,907	240	179,8	23	0,595	$3,10 \cdot 10^{-1}$

Tabelle 3. Versuche von Wamsler

Rohr- durchm. d m	Luft- temp. t_0 °C	Wand- temp. t_w °C	Wärmeüber- gangszahl α kcal $h^{-1} \cdot m^{-2} \cdot ^\circ C^{-1}$	A	B
0,0205	20,8	74,6	6,88	6,08	$4,36 \cdot 10^4$
0,0205	20,4	142,2	8,55	6,95	$6,49 \cdot 10^4$
0,0205	21,3	163,8	9,02	7,11	$6,47 \cdot 10^4$
0,0205	24,3	234,0	10,05	7,40	$6,62 \cdot 10^4$
0,033	16,4	67,5	6,57	9,21	$1,85 \cdot 10^5$
0,033	17,6	92,7	7,18	9,85	$2,30 \cdot 10^5$
0,033	19,5	130,7	8,20	10,73	$2,68 \cdot 10^5$
0,033	24,2	208,2	9,18	11,10	$2,81 \cdot 10^5$
0,048	17,4	77,1	5,89	12,18	$6,21 \cdot 10^5$
0,048	20,2	122,8	6,74	13,20	$7,98 \cdot 10^5$
0,048	19,5	133,8	7,06	13,68	$8,25 \cdot 10^5$
0,048	23,6	160,8	7,52	14,10	$8,30 \cdot 10^5$
0,048	22,1	163,1	7,51	14,03	$8,47 \cdot 10^5$
0,048	25,0	186,3	7,63	14,00	$8,50 \cdot 10^5$
0,048	27,4	211,6	8,21	14,60	$8,38 \cdot 10^5$
0,048	28,8	238,1	8,72	15,15	$8,16 \cdot 10^5$
0,076	17,6	56,3	5,01	16,80	$1,86 \cdot 10^6$
0,076	21,7	112,2	6,21	19,43	$2,90 \cdot 10^6$
0,076	26,6	155,9	6,59	19,64	$3,18 \cdot 10^6$
0,076	29,3	177,7	7,02	20,40	$3,17 \cdot 10^6$
0,089	16,0	56,5	4,52	17,9	$3,17 \cdot 10^6$
0,089	17,7	88,0	5,05	19,0	$4,36 \cdot 10^6$
0,089	21,6	118,8	5,51	20,0	$4,81 \cdot 10^6$
0,089	24,7	138,7	5,84	20,7	$4,93 \cdot 10^6$
0,089	25,2	160,2	6,21	21,5	$5,16 \cdot 10^6$
0,089	29,2	181,6	6,37	21,5	$5,09 \cdot 10^6$

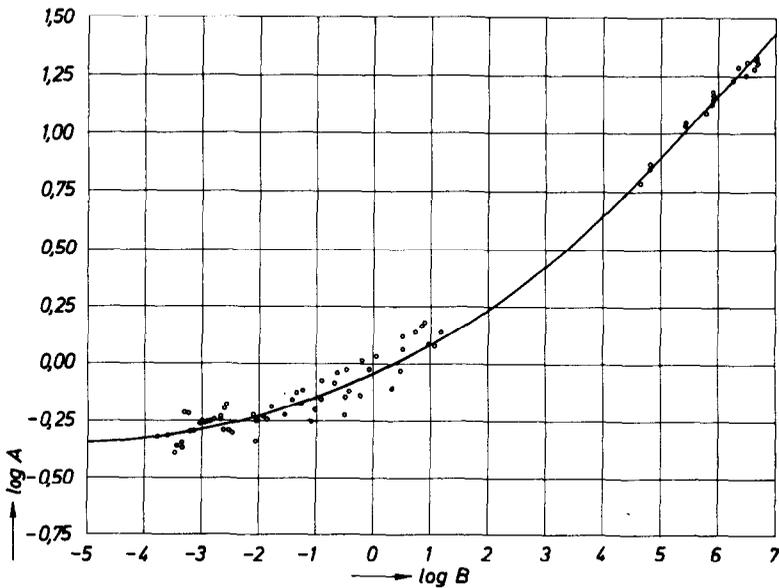


ABB. 3.

Tabelle 4. Versuche von Langmuir

Draht- durchmesser d m	Wand- temperatur T_w ° abs.	Wärmeüber- gangszahl α kcal. $\text{h}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{°C}^{-1}$	A	B
0,0000404	450	401	0,614	$4,93 \cdot 10^{-4}$
0,0000404	1112	520	0,480	$2,58 \cdot 10^{-4}$
0,0000404	1470	600	0,476	$1,713 \cdot 10^{-4}$
0,0000691	380	213	0,756	$2,08 \cdot 10^{-3}$
0,0000691	425	241	0,811	$2,51 \cdot 10^{-3}$
0,0000691	490	263	0,819	$2,64 \cdot 10^{-3}$
0,0000691	620	285	0,801	$2,44 \cdot 10^{-3}$
0,0000691	760	294	0,769	$2,08 \cdot 10^{-3}$
0,0000691	945	322	0,756	$1,606 \cdot 10^{-3}$
0,0000691	1010	329	0,748	$1,425 \cdot 10^{-3}$
0,0000691	1155	354	0,745	$1,227 \cdot 10^{-3}$
0,0000691	1275	371	0,741	$1,077 \cdot 10^{-3}$
0,0000691	1370	393	0,746	$9,61 \cdot 10^{-4}$
0,0000691	1420	395	0,740	$9,11 \cdot 10^{-4}$
0,0000691	1460	406	0,743	$8,77 \cdot 10^{-4}$
0,0000691	1850	518	0,782	$5,88 \cdot 10^{-4}$
0,0001264	545	98	0,848	$1,270 \cdot 10^{-1}$
0,0001264	1145	133	0,763	$6,00 \cdot 10^{-2}$
0,0001264	1375	145	0,747	$4,58 \cdot 10^{-2}$
0,0002508	512	146	0,650	$1,637 \cdot 10^{-2}$
0,0002508	1105	204	0,602	$8,00 \cdot 10^{-3}$
0,0002508	1530	235	0,568	$4,89 \cdot 10^{-3}$
0,000510	510	59	1,078	1,150
0,000510	1020	85	1,031	$6,25 \cdot 10^{-1}$
0,000510	1485	100	0,944	$3,40 \cdot 10^{-1}$
0,000510	1868	110	0,910	$2,32 \cdot 10^{-1}$

Tabelle 5. Versuche von Bylevelt

Draht- durchm. $\text{m} \cdot 10^4$	Raum- temperatur t_0 °C	Wand- temperatur t_w °C	Wärmeüber- gangszahl α kcal. $\text{h}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{°C}^{-1}$	A	B
10	20,2	48,6	29,5	3,18	3,13
10	21,8	73,6	31,9	1,375	5,21
10	21,3	98,1	35,1	1,460	6,73
10	20,3	115,8	37,2	1,517	7,48
0,43	19,2	73,4	242	0,448	$4,51 \cdot 10^{-4}$
0,43	17,2	123,5	286	0,500	$6,43 \cdot 10^{-4}$
0,43	17,3	168,3	304	0,505	$7,10 \cdot 10^{-4}$

berechneten Werte von A und B sind in den Tabellen 2, 3, 4 und 5 enthalten. Leider sind bei allen Versuchen nicht sämtliche Größen beobachtet worden, die zur Berechnung von A und B gebraucht werden.

Kennelly gibt nur für eine Versuchsreihe die Lufttemperatur $T_2 = 291^\circ$ abs. an. Diese Zahl wurde auch den andern Versuchsreihen zugrunde gelegt. Bei Wamsler ist der Druck der Luft nicht gemessen worden. Da die Versuche

in München ausgeführt wurden, wurde ihnen der dortige mittlere Barometerstand von 715 mm Hg bei 0° C zugrunde gelegt. Langmuir gibt nicht den Luftdruck und nur bei einer Versuchsreihe die Umgebungstemperatur zu $T_0 = 300^\circ$ abs. an. Seinen Versuchen wurde deshalb eine Lufttemperatur von 300° abs. und ausserdem ein Luftdruck von 750 mm beigelegt. Die Versuche von Bylevelt wurden in Dresden ausgeführt. Es wurde ihnen der dortige mittlere Luftdruck von 750 mm zugrunde gelegt. Das Material der Drähte war folgendes:

- Kennelly—Kupfer,
- Langmuir—Platin,
- Bylevelt—Nickel und Tantal,
- Wamsler—Schmiedeeiserne Gasrohre.

In die Abb. 3 sind sämtliche Beobachtungen eingetragen, und zwar als Abszissen $\log B$ und als Ordinate $\log A$. Die Punkte lassen sich befriedigend durch die eingezeichnete Kurve ausgleichen. Die Ordinaten dieser Kurve sind

Tabelle 6

B	$\log B$	$\log A$	A
10^{-5}	—5	0,650—1	0,447
10^{-4}	—4	0,670—1	0,468
10^{-3}	—3	0,710—1	0,512
10^{-2}	—2	0,767—1	0,585
10^{-1}	—1	0,855—1	0,716
1	0	0,957—1	0,905
10	1	0,08	1,203
10^2	2	0,23	1,698
10^3	3	0,42	2,630
10^4	4	0,64	4,36
10^5	5	0,90	7,95
10^6	6	1,16	14,46
10^7	7	1,42	26,30

in der Tabelle 6 enthalten. Dadurch ist A als Funktion von B festgelegt

$$A = W(B) \tag{51}$$

Aus der Abb. oder der Tabelle kann für Werte von $B = 10^{-5}$ bis 10^{+7} der zugehörige Wert von A entnommen werden. Im Bereich $B = 10^4$ bis 10^7 kann diese Abhängigkeit durch eine

Potenz dargestellt werden. Es ergibt sich dafür

$$A = 0,398 \cdot B^{0,26} \tag{51a}$$

oder

$$\alpha = \frac{0,398 \cdot \lambda_m}{d} \left(\frac{d^3 \gamma_m^2 \Theta_w}{g \eta_m^2 T_m} \right)^{0,26} \tag{51b}$$

Für Werte von B kleiner als 10^{-5} scheint A sich einem konstanten Wert zu nähern, so dass hierfür

$$\alpha = \frac{c \cdot \lambda_m}{d} \tag{51c}$$

also die Wärmeübergangszahl umgekehrt proportional dem Rohrdurchmesser und proportional der mittleren Wärmeleitzahl würde. Für Werte von B grösser als 10^7 wird wohl bald der Fall eintreten, dass die Wärmeübergangszahl unabhängig vom Durchmesser des Rohres wird. Daraus folgt dann

$$A = c \cdot B^{\dagger} \tag{51d}$$

Es möge nun die mit der Tabelle 6 gewonnene Gesetzmässigkeit an einigen Beispielen erläutert werden. Da die Dichte der Luft vom Druck und der Temperatur abhängig ist, so ist die Wärmeübergangszahl von vier Grössen abhängig:

- vom Luftdruck,
- von der Lufttemperatur,
- von der Oberflächentemperatur
- und vom Rohrdurchmesser.

Bei einem ersten Beispiel werde der Rohrdurchmesser geändert. Der Luftdruck betrage

Tabelle 7

Rohrdurchmesser m	Wärmeübergangszahl α kcal. h ⁻¹ . m ⁻² . °C ⁻¹
0,1	3,45
0,01	6,28
0,001	20,5
0,0001	138,5
0,00002	963,0

1 Atm. Die Lufttemperatur 288° abs. und die Temperaturdifferenz 10°C, also die Oberflächentemperatur 298° abs. Die Werte der Wärmeübergangszahl sind in der Tabelle 7 zusammengestellt und in der Abb. 4 dargestellt.

(51c), so ist für solche die Wärmeabgabe eines Drahtes unabhängig vom Durchmesser und nur abhängig von der mittleren Wärmeleitzahl der Luft, also auch unabhängig vom Luftdruck.

Ein 1'' Gasrohr werde in Luft von 288° horizontal aufgehängt auf 298° abs. erwärmt. Für diesen Fall enthalten Tabelle 8 und Abb. 5 den Einfluss des Luftdruckes auf die Wärmeübergangszahl.

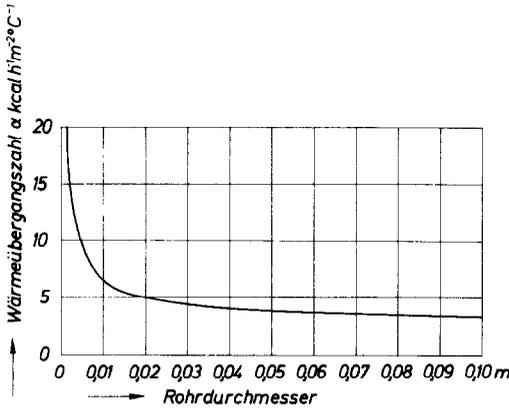


ABB. 4. Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl vom Rohrdurchmesser.

Man entnimmt ihr einen namentlich bei kleinen Durchmessern gewaltigen Einfluss. Besteht für sehr kleine Durchmesser die Gleichung

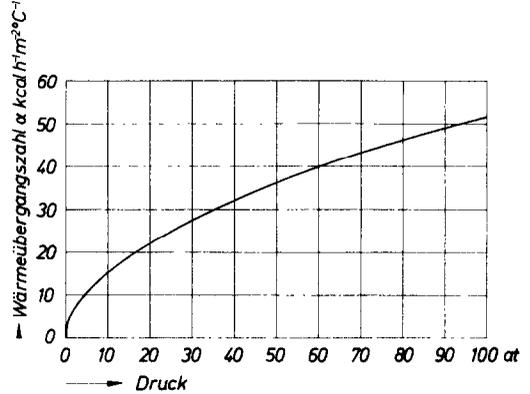


ABB. 5. Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl vom Druck.

Tabelle 8

Luftdruck Atm. abs.	Wärmeübergangszahl α kcal. h ⁻¹ . m ⁻² . °C ⁻¹	Luftdruck Atm. abs.	Wärmeübergangszahl α kcal. h ⁻¹ . m ⁻² . °C ⁻¹
0,0001	0,418	5	10,84
0,001	0,543	10	15,55
0,01	0,868	25	25,0
0,1	1,72	50	36,8
0,5	3,34	75	44,5
1	4,69	100	51,4
2	6,72		

Tabelle 9

Lufttemperatur T_0 ° abs.	Wärmeübergangszahl α kcal h ⁻¹ . m ⁻² . °C ⁻¹	Lufttemperatur T_0 ° abs.	Wärmeübergangszahl α kcal. h ⁻¹ . m ⁻² . °C ⁻¹
200	2,94	700	2,62
288	2,74	800	2,67
300	2,72	900	2,70
400	2,63	1000	2,75
500	2,60	1500	3,06
600	2,59	2000	3,38

Für Druck über 1 Atm. ist die Wärmeübergangszahl ungefähr der Wurzel aus dem Druck proportional ($\alpha = c \cdot p^{0,52}$); bei Vakuum ist der Einfluss des Druckes geringer.

Ändert man bei konstantem Luftdruck, gleichbleibendem Durchmesser und unveränderlicher Temperaturdifferenz die Lufttemperatur, so ist die Änderung der Wärmeübergangszahl gering, wie das in Tabelle 9 und Abb. 6

oder umgekehrt strömt. Man kann also die Wand- und Lufttemperatur vertauschen, ohne den Wärmeübergang zu ändern. Die Tabelle 10 und die Abb. 7 enthalten für ein Rohr von 0,025 m Durchmesser bei 1 Atm. Druck und 288° abs. Lufttemperatur die Wärmeübergangszahl für verschiedene Temperaturdifferenz.

Es wurde auch versucht, statt der Gleichung (28a) die allgemeinere Gleichung (43) zur Auswertung der Versuche heranzuziehen. Die Grösse A ist nach ihr, wenn man sich mit der Aufstellung einer Formel für zweiatomige Gase begnügt, von zwei unabhängigen Veränderlichen, B und D , abhängig. In einem rechtwinkligen Achsenkreuz aufgetragen, müssten die Versuchswerte dann auf einer Fläche liegen. Zur eindeutigen Bestimmung dieser Fläche erwies das Versuchsmaterial sich als zu wenig zahlreich und zu ungenau.

Die gefundene Beziehung

$$A = W(B) \tag{51e}$$

ausgedrückt durch die Abb. 3 und die Tabelle 6, gilt natürlich nur für ein in einem ruhenden,

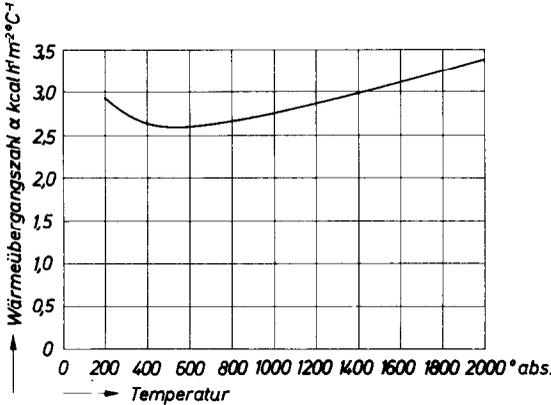


ABB. 6. Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Temperatur.

Tabelle 10

Temperatur- differenz Θ_w °C	Wärmeübergangszahl α kcal. h ⁻¹ . m ⁻² . °C ⁻¹	Temperatur- differenz Θ_w °C	Wärmeübergangszahl α kcal h ⁻¹ . m ⁻² . °C ⁻¹
-100	9,30	100	8,20
-50	7,38	200	9,40
-10	4,83	300	9,96
+10 ⁻⁷	0,414	500	9,96
10 ⁻²	1,17	750	11,88
0,1	1,72	1000	12,45
1	2,74	1250	13,09
10	4,69	1500	13,34
50	7,00	2000	14,14

abgebildete Beispiel zeigt. Es ist berechnet für $d = 0,025$ m, $p = 1$ Atm. und $\Theta_w = 10^\circ\text{C}$. Bedeutend ist dagegen der Einfluss der Temperaturdifferenz. Die Formel zeigt zunächst, dass bei gegebener Temperaturdifferenz die Wärmeübergangszahl die gleiche ist, gleichgültig ob die Wärme vom Rohr an die Luft

zweiatomigen Gase, z. B. Luft, horizontal aufgehängtes, langes Rohr von kreisförmigem Querschnitt. Die Formel soll nun noch auf beliebige Gase und Flüssigkeiten, für die ja zunächst die Gleichung (24) gilt, die aussagt, dass A eine Funktion der beiden unabhängigen B und C ist, ausgedehnt werden. Die

Gleichung (51e) ist nur ein Fall der Gleichung (24), wenn man in ihr für C den Wert für Luft einsetzt. Dieser berechnet sich aus den Werten von λ , η und c_p (hier ist zu beachten, dass c_p die

also eine Funktion mit einer unabhängig Veränderlichen. Diese Gleichung ist ein Sonderfall der Gleichung (24), denn die unabhängig Veränderliche ist B/C^2 . Sie kann also auch

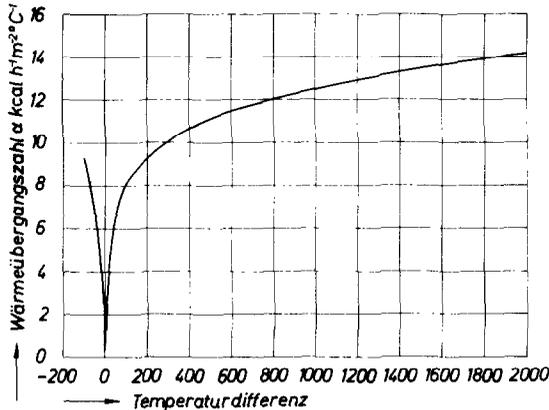


ABB. 7. Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Temperaturdifferenz.

spez. Wärme der Masseneinheit ist, die im technischen Mass-system aus der spez. Wärme der Gewichtseinheit durch Multiplikation mit der Erdbeschleunigung 9,81 erhalten wird) zu

$$C_{\text{Luft}} = \frac{1}{0,7} \quad (52)^*$$

Man kann die Gleichung (24) wesentlich vereinfachen, wenn man in den Differentialgleichungen (3) einige Vereinfachungen vornimmt. Nimmt man an, dass die Reibung auf den Strömungsvorgang von geringem Einfluss ist, so kann man das Zähigkeitsglied auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung vernachlässigen. Führt man mit diesen vereinfachten Gleichungen die Ähnlichkeitsbetrachtung durch, so erhält man

$$A = \frac{\alpha d}{\lambda} = \Phi \left(\frac{d^3 \rho^2 c_p^2 r \Theta_w g}{\lambda^2} \right) \quad (53)$$

* In the original text this value was erroneously given as 1/2.04. Equation 56b and values obtained from it were consequently changed.

$$A = \Phi \left(\frac{B}{C^2} \right) \quad (53a)$$

geschrieben werden. Der bekannten Boussinesq'schen Formel [8] liegt jene Vernachlässigung zugrunde; sie ist ein Sonderfall von Gleichung (53a), denn sie lautet

$$A = c \sqrt[3]{\left(\frac{B}{C^2} \right)} \quad (54)$$

Statt dessen kann man in der dynamischen Gleichung auch eine andere Vernachlässigung machen, indem man das Beschleunigungsglied vernachlässigt. Dann liefert die Ähnlichkeitsbetrachtung die Formel

$$A = \frac{\alpha d}{\lambda} = \Phi \left(\frac{d^3 c_p \rho^2 g r \Theta_w}{\eta \lambda} \right) \quad (55)$$

also auch wieder nur eine Funktion mit nur einer unabhängigen Veränderlichen. Auch diese Gleichung (55) ist ein Sonderfall von Gleichung (24), denn sie kann auch

$$A = \Phi \left(\frac{B}{C} \right) \quad (55a)$$

geschrieben werden. Die bekannte Formel von Lorenz [9] ist ein Sonderfall dieser Gleichung, denn sie lautet

$$A = c \sqrt[4]{\left(\frac{B}{C} \right)} \quad (56)$$

Da nun für die Wärmeabgabe der Zustand in der an die Oberfläche des die Wärme abgebenden Körpers grenzenden Flüssigkeitsschicht wesentlich entscheidend und dort die Reibung von starkem Einfluss auf die Flüssigkeitsströmung ist, so scheint mir die der Gleichung (55a) zugrunde liegende Näherung, welche die Trägheitsglieder gegen die Zähigkeitsglieder in den Grundgleichungen vernachlässigt, eine

von der Wirklichkeit wenig abweichende Strömung zu liefern. Ich erblicke deshalb in der Gleichung (55) eine praktisch brauchbare Näherungsgleichung.

Sie ist abgeleitet worden in der Annahme, dass λ , η , c_p und r von der Temperatur unabhängige Größen sind. Dieselben Betrachtungen, die zur Gleichung (44) führten, sagen aus, dass die Gleichung (55a) auch für wirkliche Flüssigkeiten gilt, wenn man für diese Größe ihre integralen Mittelwerte zwischen T_w und T_0 einsetzt.

Für Luft bzw. für zweiatomige Gase war oben die Gleichung (51e)

$$A = W(B) \quad (51e)$$

gefunden worden. Aus Gleichung (55a) folgt dann für jedes Gas und jede Flüssigkeit

$$A = W\left(\frac{B \cdot C_0}{C}\right) \quad (56a)$$

Hierin ist C_0 nach Gleichung (52) $1/0,7$. Daher ist die Wärmeübergangszahl für die Abkühlung oder Erwärmung eines horizontal liegenden Rohrs in einem Gase oder einer Flüssigkeit

$$\alpha = \frac{\lambda_m}{d} W\left(\frac{d^3 \rho_m^2 c_{pm} g r_w \Theta_w}{0,7 \eta_m \lambda_m}\right) \quad (56b)$$

In dieser Gleichung ist also

- W die Funktion, dargestellt durch die Abb. 3 und die Tabelle 6,
- Θ_w die Übertemperatur (Oberflächentemperatur weniger Umgebungstemperatur),
- d der Durchmesser eines horizontal liegenden Rohres,
- ρ_m die mittlere Dichte der das Rohr kühlenden Flüssigkeit,
- η_m deren mittlere Zähigkeitszahl,
- λ_m deren mittlere Wärmeleitzahl,
- c_{pm} deren mittlere spez. Wärme der Masseneinheit,
- r_m deren mittlerer Ausdehnungskoeffizient,
- g die Erdbeschleunigung.

Als Beispiel möge die Abkühlung eines Rohres von $d = 0,025$ m Durchmesser in Wasser berechnet werden. Die Wassertemperatur sei 15°C und die Oberflächentemperatur des Rohres 25°C . Dann ist

$$\Theta_w = 25 - 15 = 10^\circ\text{C}.$$

Da das spez. Gewicht des Wassers

$$\text{bei } 15^\circ\text{C } \gamma = 999,12 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

und

$$\text{bei } 25^\circ\text{C } \gamma = 997,06 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

ist, wird die mittlere Dichte

$$\rho_m = \frac{998,09}{9,81} = 101,7 \text{ kg} \cdot \text{sk}^2 \cdot \text{m}^{-4}.$$

Die mittlere spez. Wärme der Masseneinheit ist

$$c_p = 0,9987 \cdot 9,81 = 9,80 \text{ kcal m kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \text{ sk}^{-2}.$$

Die mittlere Zähigkeit des Wassers ist

$$\eta_m = 102,10 \cdot 10^{-6} \text{ kgf} \cdot \text{sk m}^{-2}.$$

Die mittlere Wärmeleitzahl ist natürlich auch in Wärmeeinheiten pro Sekunde auszudrücken. Sie ist*

$$\lambda_m = 143 \cdot 10^{-6} \text{ kcal} \cdot \text{sk}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}.$$

Aus der Dichteänderung des Wassers folgt der mittlere Ausdehnungskoeffizient zu

$$r = 2,06 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}.$$

Diese Werte ergeben

$$\frac{B \cdot C_0}{C} = 3,09 \cdot 10^6$$

und damit nach der Tabelle 6

$$A = 15,03$$

* Siehe meine demnächst in der Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure erscheinende Abhandlung über "Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes".

oder die gesuchte Wärmeübergangszahl

$$\alpha = 309 \text{ kcal. m}^{-2} \text{ h}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

Versuche liegen für diesen Fall leider nicht vor. Aber der praktischen Erfahrung entspricht dieser Wert sehr gut.

Es ist zu erwarten, dass für andere Körper der Charakter der Funktion W derselbe bleibt.

Die bisher aufgestellten Formeln bezogen sich auf die Abkühlung eines festen Körpers in ruhender Flüssigkeit. Er soll nun durch einen Luftstrom von der Geschwindigkeit w_2 in gegebener Richtung gekühlt werden. Die hydro- und thermodynamischen Gleichungen bleiben dann dieselben. Nur die Grenzbedingungen sind zum Teil andere. In grosser Entfernung ist die Luftgeschwindigkeit nicht mehr null, sondern gleich dem Vektor w_2 . Betrachtet man wieder zwei geometrisch und thermisch ähnliche Fälle, so muss jetzt das Verhältnis der Geschwindigkeiten μ gleich

$$\mu = \frac{w_{02}}{w_{01}} \quad (57)$$

also gleich dem Verhältnis der Geschwindigkeiten der Luftströme sein. Damit Ähnlichkeit für beide Fälle besteht, muss dann neben der Konstanz von B und C nach Gleichung (11b) und (12b) auch noch nach Gleichung (8) der Bruch

$$\frac{dw_{0\rho}}{\eta} = E \quad (58)$$

konstant bleiben. Demzufolge wird jetzt

$$A = \Phi(B, C, E) \quad (59)$$

also eine Funktion von drei unabhängig Veränderlichen, oder

$$\alpha = \frac{\lambda}{d} \Phi\left(\frac{\lambda}{c_p \eta}, \frac{d^3 \rho^2 g \Theta_w}{\eta^2}, \frac{dw_{0\rho}}{\eta}\right) \quad (59a)$$

Nimmt man die Abkühlung in einem Gase vor, so tritt noch D als Unabhängige auf, so dass dann die Wärmeübergangszahl

$$\alpha = \frac{\lambda}{d} \Phi\left(\frac{\lambda}{c_p \eta}, \frac{d^3 \rho^2 g}{\eta^2}, \frac{T_w}{T_0}, \frac{dw_{0\rho}}{\eta}\right) \quad (60)$$

wird.

Ist die Geschwindigkeit des Luftstromes sehr gross, dann verschwindet der Einfluss der Schwerkraft und es wird

$$\alpha = \frac{\lambda}{d} \Phi\left(\frac{\lambda}{c_p \eta}, \frac{T_w}{T_0}, \frac{dw_{0\rho}}{\eta}\right) \quad (61)$$

Führt man wieder die Mittelwerte für die Temperaturveränderlichen Grössen ein, und beschränkt man sich auf zweiatomige Gase, so wird

$$\alpha = \frac{\lambda_m}{d} \Phi\left(\frac{dw_{0\rho m}}{\eta_m}\right) \quad (62)$$

eine Formel, die ich an Versuchen über den Wärmeübergang im Rohr geprüft und für richtig gefunden habe. Über diesen Fall soll demnächst berichtet werden.

Alle bisher behandelten Fälle bezogen sich auf den stationären Zustand. Es möge im Anschlusse daran noch ein veränderlicher Zustand betrachtet werden, der dadurch charakterisiert sei, dass die Oberflächentemperatur des Körpers zunächst die Umgebungstemperatur T_0 besitze und dann plötzlich auf die Temperatur T_w geheizt und dauernd auf ihr erhalten werde. Im Dauerzustand gilt die Gleichung (60). Um den Wert der Wärmeübergangszahl während der veränderlichen Periode zu erhalten, muss man die eingangs durchgeführten Betrachtungen wiederholen. Es tritt jetzt als neue Grenzbedingung hinzu, dass zur Zeit $t = 0$ die Lufttemperatur an allen Stellen T_0 ist. Betrachtet man wieder zwei ähnliche Fälle, so verlangt jetzt die Gleichung (9), dass

$$\frac{t\eta}{\rho d^2} = F \quad (9a)$$

konstant ist. Demzufolge erweitert sich die Gleichung (60) zu

$$\alpha = \frac{\lambda}{d} \Phi\left(\frac{\lambda}{c_p \eta}, \frac{d^3 \rho^2 g}{\eta^2}, \frac{T_w}{T_0}, \frac{dw_{0\rho}}{\eta}, \frac{t\eta}{\rho d^2}\right) \quad (63)$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die Wärmeübergangszahl von der Zeit t abhängt, die seit dem Beginnen der Abkühlung des Körpers verstrichen ist. Diese Erscheinung habe ich vor einiger Zeit an einem andern Fall [10] entdeckt. In einem Gefäss wurde eine Gasmenge eingeschlossen und bei kaltbleibenden Wänden plötzlich auf eine hohe Temperatur gebracht. Die Abkühlungsgeschwindigkeit wurde durch einen Indikator gemessen. In einem Schaubild wurde über der Gastemperatur die jeweilige, aus dem Druckabfall pro Zeiteinheit berechnete Wärmeübergangszahl aufgetragen. Je kleiner die Temperatur war, desto kleiner war die Wärmeübergangszahl. Es wurden nun eine Reihe von Versuchen mit verschiedener Erwärmung des Gases vorgenommen und für jeden Versuch die αT -Kurve gezeichnet. Da für die verschiedenen Versuche bei derselben Temperatur des Gases auch die Wandtemperatur und die Dichte dieselben waren, hatte man denselben Wert erwarten müssen, also für alle Versuche eine Kurve. Wenn man für jeden Versuch vom ersten Teil der Abkühlung absieht, stimmt diese Anschauung auch. Die Punkte im ersten Teil der Abkühlung liegen aber bei allen Versuchen höher. Diese Erscheinung, durch die die Wärmeübergangszahl am Anfang der Abkühlung stark vergrössert wurde, konnte nur dem Einfluss der Zeit zugeschrieben werden. Diese Beobachtung wurde damals von mir unter Vernachlässigung der Schwerkraft bewiesen, eine Vereinfachung, die nun bei der obigen Ableitung wegfällt. Bei der Abkühlung des oben betrachteten Körpers wird demnach am Anfang der Abkühlung die Wärmeübergangszahl bedeutend grösser sein als der jeweilige Wert nach Gleichung (28a). Aber nach einiger Zeit fällt der Einfluss der Zeit weg, und es tritt jeweils die für den stationären Zustand geltende Wärmeübergangszahl ein.

ZUSAMMENFASSUNG

Ausgehend von den Differentialgleichungen der Strömung und Wärmeleitung wird für die Abkühlung eines Körpers in einem zweiatomigen Gase eine Beziehung aufgestellt, die durch die in der Literatur vorhandenen Versuche über die Abkühlung eines horizontalen Zylinders in Luft geprüft und bestätigt gefunden wurde. Sie zeigt die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Oberflächentemperatur, der Gastemperatur, der Temperaturdifferenz, dem Rohrdurchmesser und dem Luftdruck. Aus ihr wird eine Näherungsgleichung für andere Gase und für tropfbare Flüssigkeiten abgeleitet.

LITERATUR

1. W. NUSSELT, Der Wärmeübergang in Rohrleitungen, *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, 1909, Seite 1750, und *Mitteilungen über Forschungsarbeiten*. Heft 89.
2. Siehe z. B. . . . CHWOLSON, *Lehrbuch der Physik*, Bd. III, S. 306, oder . . . Winkelmann, *Handbuch der Physik*, Bd. III, S. 436.
3. H. MOSER, Über die Wärmeleitfähigkeit von Gasen und Dämpfen bei höheren Temperaturen. Diss. 1913.
4. . . KENNELLY, . . WRIGHT and . . BYLEVELT, The convection of heat from small copper wires, *Trans. Amer. Inst. Elect. Engin.* 28. I. 1909, S. 363.
5. L. WAMSLER, Die Wärmeabgabe geheizter Körper an Luft, *Mitteilungen über Forschungsarbeiten*, Heft 98 und 99 (1911).
6. I. LANGMUIR, Convection and conduction of heat in gases, *Physical Review* (1912) 34, S. 401.
7. . . BYLEVELT, Die künstliche Konvektion am elektrischen Hitzdrahte. Diss. Dresden (1915).
8. J. BOUSSINESQ, Mise en équation des phénomènes de convection calorifique et aperçu sur le pouvoir refroidissant des fluides, *Journal de physique* (1902) S. 65.
9. L. LORENZ, Über das Leitvermögen der Metalle für Wärme und Elektrizität, *Wied. Ann.* 1881. Bd. 13, 13, S. 582.
10. W. NUSSELT, Der Wärmeübergang in der Gasmaschine, die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Zeit, *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure* (1914) S. 361.